UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂMICA
CENTRO TECNOLÓGICO
LEPTEN-Laboratório de Engenharia de Processos de Conversão e Tecnologia de Energia

O CONCEITO DE CAMADA LIMITE: UMA REVISÃO CRÍTICA DE LIVROS-TEXTO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Júlio César Passos

e-mail: jpassos@emc.ufsc.br

Blog: http://energetique-juliocesarpassos.blogspot.com.br

LEPTEN LABORATÓRIOS DE ENGENHARIA DE PROCESSOS DE CONVERSÃO E TECNOLOGIA DE ENERGIA
AEB AGÊNCIA ESPACIAL BRASILEIRA
ABCM ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ENGENHARIA E CIÊNCIAS MECÂNICAS
CONEM 2010 VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica
VI CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA
VI NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING
18 a 21 de agosto de 2010 – Campina Grande – Paraíba - Brasil
August 18 – 21, 2010 – Campina Grande – Paraíba – Brazil

Conteúdo

Sobre os livros de transmissão do calor

Aspectos históricos sobre camada limite

Equações do problema na CL e fora da CL

Análise dimensional do problema de CL

Simplificações

Falhas encontradas nos livros texto considerados

Conclusões

Livros-texto de transmissão do calor (1)

Principais obras disponíveis em Língua Portuguesa

Kreith (1977) – *Princípios da Transmissão Calor, Ed., Edgard Blücher Ltda*

Tradução da 3ª ed. americana de

Kreith (1973) – *Principles of Heat Transfer*

Holman (1983) – *Transferência de Calor, McGraw-Hill*

Tradução da 4ª ed. americana de

Kreith (1976) –*Heat Transfer*

Boiling

Livros-texto de transmissão do calor (2)

Principais obras disponíveis em Língua Portuguesa

Incropera, De Witt, Bergamn, Lavine (2008) – *Fundamentos da Transferência de Calor e de Massa, LTC*

Tradução da 6ª ed. americana de

Incropera et al. (2007) – *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*

Çengel (2009) –*Transferência de Calor e Massa: uma Abordagem Prática*, McGraw-Hill, São Paulo

Tradução da ed. americana de

Çengel (2007) – *Heat and Mass Transfer,* McGraw-Hill

Livros-texto de transmissão do calor (2)

Principais obras disponíveis em Língua Portuguesa

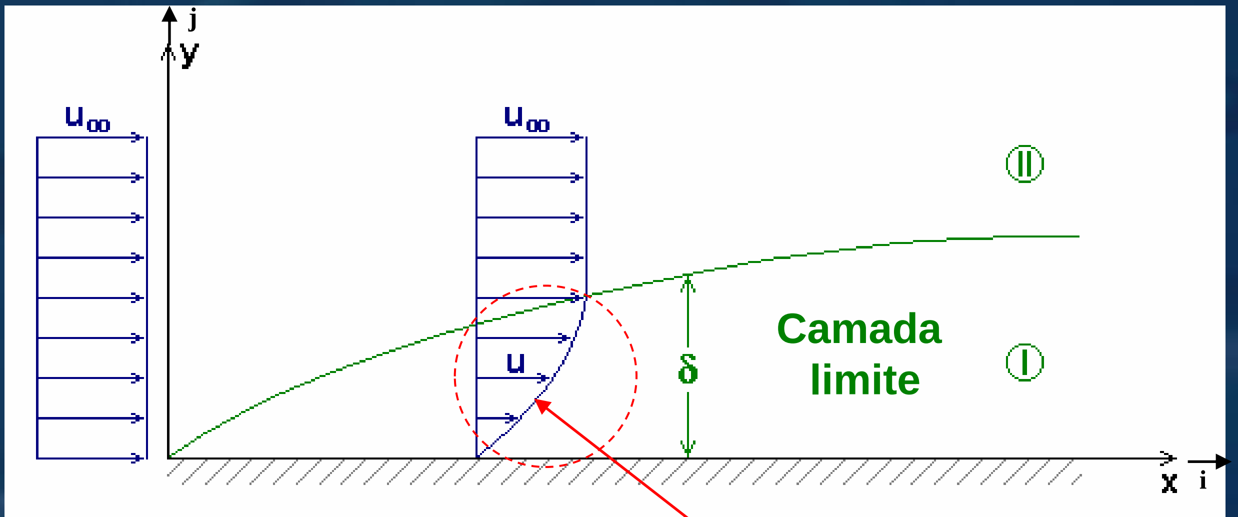
Bejan (1996) –*Transferência de Calor*, ed., Edgard Blücher Ltda

Tradução da 6ª ed. americana de

Bejan (1994) – *Heat Transfer, John Wiley*

Constata-se a quase total ausência de livros texto de autores brasileiros.

O conceito de camada limite



$$y = 0 \qquad y \to \infty$$

$$u = v = 0 \qquad u \to u_\infty$$

Aspectos Históricos

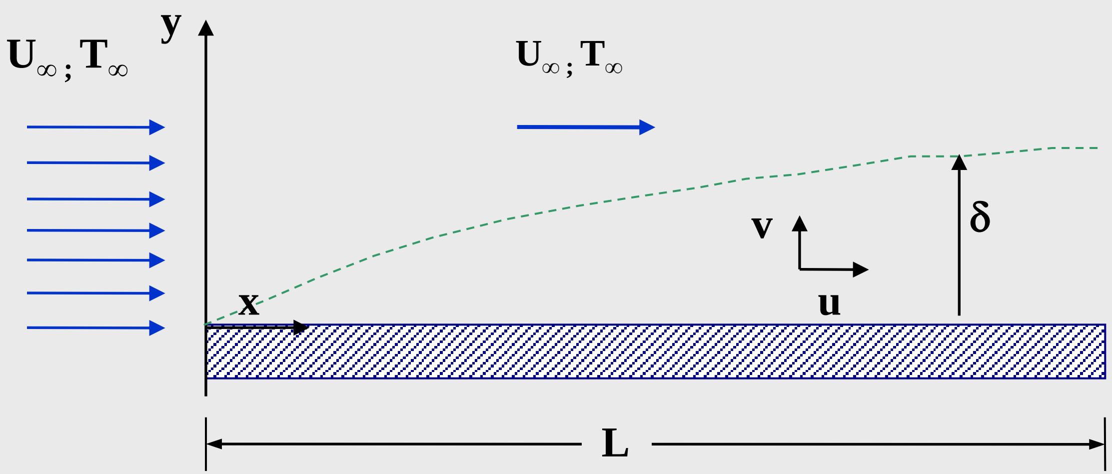
O conceito de Camada Limite foi introduzido por Ludwig Prandtl, em 1904.

Permitiu conciliar duas abordagens distintas da área de mecânica dos fluidos, cujos resultados eram conflitantes, a teórica e a experimental.

A via teórica era representada pela hidrodinâmica: fluido invíscido. Daniel Bernoulli (1700-1782) e Leonardo Euler (1707-1783)

A via experimental era representada pela hidráulica e suas soluções urgentes para os problemas de engenharia (perda de carga em tubos e dutos, força de arrasto)

Colocação do problema



- Escoamento de fluido incompressível
- Regime permanente,
- Placa à temperatura $T_{sup} > T_\infty$
- Escoamento laminar

Equações do problema, regiões I e II

Equação da continuidade

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0}$$

Equações de Navier-Stokes: na direção *i*

$$\boxed{\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}$$

Equações de Navier-Stokes: na direção *j*

$$\boxed{\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)}$$

Equação da conservação da energia

$$\boxed{u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)}$$

Condições de contorno

$$y=0\ ,\quad 0\le x\le L$$

$$u=v=0$$

$$T=T_{sup}$$

$$y\to\infty$$

$$u\to U_\infty$$

$$T\to T_\infty$$

Boiling

Análise dimensional, CL laminar

Hipótese de partida

$$\delta << L$$

Variáveis adimensionais

$$x^* \equiv \frac{x}{L} \qquad y^* \equiv \frac{y}{\delta}$$

$$u^* \equiv \frac{u}{U_\infty} \qquad v^* \equiv \frac{v}{v''}$$

$$p^* \equiv \frac{p}{\rho U_\infty^2}$$

Ordem de grandeza de v”

Equação da continuidade

$$\frac{U_\infty}{L}\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{v''}{\delta}\frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{v''}{\delta}\frac{L}{U_\infty}\frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\boxed{\frac{v''}{\delta}\frac{L}{U_\infty} = O(1)} \qquad \boxed{v'' = O\left(U_\infty \frac{\delta}{L}\right)}$$

Análise dimensional, CL laminar

Ordem de grandeza da espessura da CL

Equação de balanço da quantidade de movimento, em *i*

$$\frac{U_\infty^2}{L} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \left(U_\infty \frac{\delta}{L} \right) \frac{U_\infty}{\delta} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\left(\rho U_\infty^2\right)}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nu \left(\frac{U_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{U_\infty}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \underbrace{\frac{\nu}{U_\infty L}}_{\boxed{\mathrm{Re}_L^{-1}}} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$\frac{L^2}{\delta^2} >> 1 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} << \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}}$$

Análise dimensional, CL laminar

Ordem de grandeza dos gradientes de pressão

Ordem de grandeza dos termos da EQM, em *j*

$$\rho\, u \frac{\partial v}{\partial x} = \rho\, U_\infty u^* \left(U_\infty \frac{\delta}{L} \right) \frac{\partial v^*}{L \partial x^*} = \rho\, \frac{U_\infty^2}{L} \left(\frac{\delta}{L} \right) u^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*}$$

Então,

$$O\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = O\left(\rho \frac{U_\infty^2}{L} \left(\frac{\delta}{L} \right) \right)$$

Ordem de grandeza dos termos da EQM, em *i*

$$\rho\, u \frac{\partial u}{\partial x} = \rho\, U_\infty u^* \frac{U_\infty \partial u^*}{L \partial x^*} = \rho\, \frac{U_\infty^2}{L} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \quad ; \quad O\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = O\left(\rho \frac{U_\infty^2}{L} \right)$$

Portanto,

$$\boxed{O\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) << O\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)} \longrightarrow \boxed{p(x, y) \approx p(x)}$$

Análise dimensional, CL laminar

Ordem de grandeza da espessura da CL

Equação da QM, para a camada limite

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{dp^*}{dx^*}+\boxed{\frac{1}{\mathrm{Re}_L}\frac{L^2}{\delta^2}}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

Condições de contorno

$$y^*=0 \qquad 0\le x^*\le 1; \quad u^*=v^*=0$$

$$y^*\to\infty \qquad u^*\to 1$$

$$\boxed{\delta=O\left(\frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}\right)}$$

Generalizando, para $x>>\delta_x$

Espessura característica da CL laminar

$$\boxed{\delta_x=O\left(\frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\right)} \Longleftrightarrow \boxed{\delta_x=O\left(\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\right)}$$

Análise dimensional, CL laminar

Espessura da camada limite laminar obtida por Blasius

$$\boxed{\delta_x = \frac{5x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}}$$

Ordem de grandeza do coeficiente de atrito

$$C_{fL} = \frac{\tau_{sup}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}; \qquad \tau_{sup} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}; \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \mu \frac{U_\infty}{\delta}\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\Big|_{y^*=0} =$$

$$\left.\begin{aligned} C_{fL} &= 2\frac{\mu \frac{U_\infty}{\delta}}{\rho U_\infty^2} = 2\frac{L}{\delta}\mathrm{Re}_L^{-1}; \\ \frac{L}{\delta} &= \sqrt{\mathrm{Re}_L} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{C_{fL} \propto \mathrm{Re}_L^{-\frac{1}{2}}}$$

Análise dimensional, CL laminar

Equação de Conservação da Energia

$$T^* = \frac{T - T_{\sup}}{T_\infty - T_{\sup}}$$

$$\frac{U_\infty}{L} u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{U_\infty \delta}{L} \frac{1}{\delta} v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \alpha \left(\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \boxed{\alpha \frac{1}{U_\infty L}} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} << \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}}$$

Boiling

Análise dimensional, CL laminar

Equação de Conservação da Energia

$$\boxed{\alpha \frac{1}{U_\infty L}} = \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)\left(\frac{\nu}{U_\infty L}\right) = \frac{1}{\Pr}\frac{1}{\mathrm{Re}_L}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\Pr \mathrm{Re}_L}\frac{L^2}{\delta^2}\frac{\partial^2 T^*}{\partial {y^*}^2}$$

Condições de contorno

$$y^* = 0 \qquad 0 \le x^* \le 1 \qquad T^* = 0$$

$$y^* \to \infty \qquad T^* \to 1$$

Similaridade das equações, CL laminar

Eq. de balanço da Quantidade de Movimento (simplificação)

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\cancel{\frac{dp^*}{dx^*}}+\frac{1}{\mathrm{Re}_L}\frac{L^2}{\delta^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

EC da Energia

$$u^*\frac{\partial T^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial T^*}{\partial y^*}=\frac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}_L}\frac{L^2}{\delta^2}\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

Problema hidrodinâmico = Problema térmico

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=\frac{1}{\mathrm{Re}_L}\frac{L^2}{\delta^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$u^*\frac{\partial T^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial T^*}{\partial y^*}=\frac{1}{\mathrm{Re}_L}\frac{L^2}{\delta^2}\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

Com

$$\frac{dp^*}{dx^*}=0$$

e **Pr=1**

Similaridade das Eqs.

das CLs **Hidrodinâmica** e **Térmica**

$$\boxed{\delta_{hidr.,x}=\delta_{térm.,x}}$$

Falhas dos livros texto analisados

Eq. da Quantidade de Movimento

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dp^*}{dx^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}_L} \boxed{\cancel{\frac{L^2}{\delta^2}}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

EC da Energia

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}_L} \boxed{\cancel{\frac{L^2}{\delta^2}}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

Causas das falhas

Escolha errônea das variáveis adimensionais para o problema da camada limite!

$\cancel{y^* \equiv \frac{y}{L}}$; $\cancel{v^* \equiv \frac{v}{U_\infty}}$ **ao invés de** $y^* \equiv \frac{y}{\delta}$; $v^* \equiv \frac{v}{v''}$

Não demonstra

$$\boxed{\delta_x = O\left(\frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\right)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\delta_x = O\left(\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\right)}$$

$$\boxed{C_{fL} \propto \mathrm{Re}_L^{-\frac{1}{2}}}$$

Resultado incorreto, Cap. 6 de Incropera et al.(2006)

$$\boxed{\cancel{C_{fL} \propto \mathrm{Re}_L^{-1}}}$$

Conclusões

Foi revisitado o problema de camada limite.

Apesar de se tratar de um problema elementar porém importante de Mecânica dos Fluidos, alguns livros texto com sucesso no mercado editorial cometem erros injustificáveis, nas suas sucessivas edições, ao apresentarem a análise dimensional e de ordem de grandeza das equações de CL.

AGRADECIMENTOS

CAPES

POSMEC

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

Muito obrigado pela atenção!