Análise Dimensional das Equações Diferenciais para a Camada Limite Laminar

Prof. Júlio César Passos
EMC-UFSC

Considere um fluido escoando paralelamente a uma placa plana horizontal em repouso, mantida à temperatura uniforme T_{sup}. Antes de alcançar a placa, a velocidade U_∞ do fluido é uniforme e a sua temperatura é T_∞, conforme esquematizado, na Figura 1.

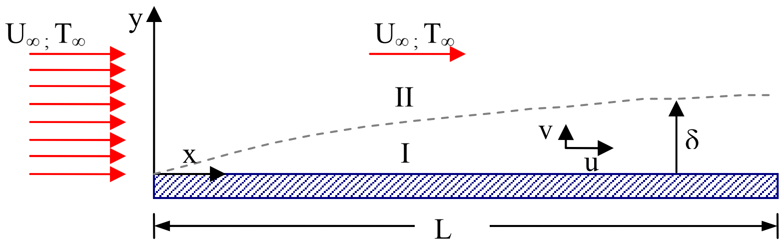

Figura 1: Escoamento de um fluido paralelamente a uma placa plana.

Prandtl, em artigo que publicou em 1904, conforme Schilichting [1], propõe o conceito de camada limite, região do escoamento vizinha à superfície, na qual os efeitos da viscosidade são importantes, ver NT-1, [2]. Na Figura 1, a camada limite é representada pela região entre y=0 e a linha pontilhada, à distância δ da superfície da placa, com δ variando em função de x. No caso de uma placa em repouso, a velocidade do fluido, na camada limite hidrodinâmica, região I do esquema da Figura 1, varia de u=0, em y=0, condição de aderência, até U_∞, para $\delta < y < \infty$, para $0 \le x \le L$. No caso da camada limite térmica, o perfil de temperatura, na região I, varia de $T=T_{sup}$, em y=0, até T_∞, longe da superfície da placa ($\delta < y < \infty$). Na região II, fora da camada limite, o efeito da viscosidade é desprezível.

As equações de conservação para o escoamento, em **regime laminar**, acima da superfície da placa, que inclui a região da camada limite e fora dela, são apresentadas, a seguir, para o **regime permanente** e para um **fluido incompressível**. Conforme foi visto na NT 1, para efeito de cálculo, considera-se que a transição do regime laminar para o turbulento, em um escoamento paralelo a uma placa plana, ocorre para o número de Reynolds crítico (Re_{cr}) de $5x10^5$, podendo ocorrer na prática, ver [3,4], para

$$10^5 \le Re_{cr} \le 3x10^6 \qquad \text{com} \qquad Re_{cr} = \frac{U_\infty x_{cr}}{\nu}$$

Equação da continuidade, ou da conservação da massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

Equações da conservação da **quantidade de movimento**, também chamada de equações de Navier-Stokes:

na direção x,

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (2)$$

na direção y,

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (3)$$

Equação da conservação da energia:

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

Na equação, acima, foram desprezados os termos de dissipação viscosa, [3-7]. Definindo o coeficiente de difusividade térmica, $\alpha\equiv\frac{k}{\rho c_p}$, tem-se :

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \qquad (4)$$

as condições de contorno são:

em $y=0$ e $0\le x\le L$; $u=v=0$ e $T=T_{\sup}$ (5)

para $y\to\infty$, $u\to U_\infty$ e $T\to T_\infty$ (6)

É importante considerar a possibilidade de simplificar as equações, acima, no domínio da Camada Limite, $0 \le y \le \delta$. Uma técnica bastante simples, antes de qualquer tentativa de se obter a solução matemática das Eqs. (1) a (6) é proceder a uma análise dimensional do sistema de equações de um problema a fim de verificar se existem termos preponderantes comparados a ordem de grandeza dos demais que permitam a simplificação da solução matemática do problema.

A fim de realizar a análise dimensional, é importante considerar que a espessura da camada limite, δ, é muito pequena comparada com o comprimento L da placa, [1,2], [5-7]. Esta hipótese se confirma, na prática.

$$\delta << L \tag{7}$$

O próximo passo é a definição das variáveis adimensionais do problema:

$$x^* \equiv \frac{x}{L} \;;\; y^* \equiv \frac{y}{\delta} \;;\; u^* \equiv \frac{u}{U_\infty} \;;\; v^* \equiv \frac{v}{v''} \;;\; p^* \equiv \frac{p}{\rho U_\infty^2} \tag{8}$$

após substituir estas variáveis, na Eq. (1), chega-se a:

$$\frac{U_\infty}{L}\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{v''}{\delta}\frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{v''}{\delta}\frac{L}{U_\infty}\frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \tag{10}$$

Para que a equação da continuidade na forma adimensional, Eq. (10), não perca a sua generalidade, na camada limite, deve-se ter:

$$\frac{v''}{\delta}\frac{L}{U_\infty} = o(1)$$

onde $o(1)$ representa a ordem de grandeza unitária, o que permite demonstrar que:

$$v'' = o\left(U_\infty \frac{\delta}{L}\right)$$

Para simplificar a notação, escreve-se:

$$v'' = U_\infty \frac{\delta}{L} \tag{11}$$

Observação: Na Eq. (11) e ao longo desta NT, o sinal de igualdade estará representando uma ordem de grandeza da dimensão na direção y. A análise que se faz nesta NT considera os termos adimensionais de mesma ordem de grandeza.

O resultado, na Eq. (11), indica que a escala da velocidade, na direção y, é muito pequena comparada com a escala da velocidade, na direção x, como conseqüência da condição $\delta << L$. Esta é uma condição importante, ditada pela conservação da massa, ou equação da continuidade, Eqs. (1) e (10).

Uma vez determinada a ordem de grandeza da velocidade na direção y, v", pode-se passar à análise dimensional das equações de conservação da quantidade de movimento.

Na direção x, substituindo as variáveis adimensionais, Eqs. (8), e introduzindo a viscosidade cinemática, $\nu \equiv \frac{\mu}{\rho}$, chega-se a:

$$\frac{U_\infty^2}{L} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \left(U_\infty \frac{\delta}{L} \right) \frac{U_\infty}{\delta} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\left(\rho U_\infty^2 \right)}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nu \left(\frac{U_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{U_\infty}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \tag{12}$$

dividindo os termos da equação, acima, por $\frac{U_\infty^2}{L}$, chega-se a :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v' \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{U_\infty L} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \tag{13}$$

onde $\frac{\nu}{U_\infty L}$, representa o inverso do número de Reynolds, $\mathrm{Re}_L \equiv \frac{U_\infty L}{\nu}$.

Como $\frac{L^2}{\delta^2} >> 1$, conclui-se que:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} << \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \tag{14}$$

Este resultado indica que a ordem de grandeza do laplaciano da velocidade na direção x é muito pequeno comparado com a ordem de grandeza do laplaciano da velocidade na direção y vezes a razão $\frac{L^2}{\delta^2}$, o que permite simplificar a Eq. (13) para:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}_L} \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \tag{15}$$

cujas condições de contorno são as seguintes:

em $y^* = 0$ e $0 \le x^* \le 1$; $u^* = v^* = 0$ (16)

para $y^* \to \infty$, $u^* \to 1$

A análise dimensional da Eq. (3) permite que se demonstre que a ordem de grandeza do gradiente de pressão, na direção y, é nula.

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0 \tag{17}$$

o que significa dizer que *p=p (x)*

A análise da Eq. (15) permite que se estime a escala da espessura da camada limite hidrodinâmica ou comprimento característico da espessura da camada limite. A fim de que a equação, na forma adimensional, resulte a mais geral possível, o termo que multiplica a derivada segunda da velocidade em relação a y também deve ser da mesma ordem de grandeza dos coeficientes que multiplicam os demais termos, à esquerda e à direita do sinal de igualdade, ou seja, a unidade. Assim, tem-se:

$$\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_L} \frac{L^2}{\delta^2} \right) = o(1) \quad \text{ou} \quad \frac{\delta}{L} = o\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \right) \tag{18}$$

ou, para simplicar a notação, conforme já apontado, acima:

$\frac{1}{\mathrm{Re}_L} \frac{L^2}{\delta^2}$=1, e

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \tag{18'}$$

O resultado apresentado na Eq. (18) pode ser generalizado para qualquer $x >> \delta_x$, onde δ_x representa a espessura local da camada limite:

$$\delta_x = \frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}} = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \tag{19}$$

o termo $\sqrt{\dfrac{\nu x}{U_\infty}}$ representa a espessura característica da camada limite laminar, na abscissa. ou escala de comprimento da espessura da camada limite, à distância x do início da placa. A solução exata do problema foi obtida por Blasius, por meio de uma solução por similaridade, que obteve a seguinte expressão para a espessura local da camada limite hidrodinâmica, ver Incropera et de Witt (1994):

$$\delta_x = \frac{5x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (20)$$

Observação: Não confundir a notação v, que representa a velocidade na direção y, em m/s, com ν, (letra grega **Nu**) que representa a viscosidade cinemática, em m/s^2.

A expressão da Eq. (19) representa um importante resultado para a solução do problema de camada limite laminar em um escoamento paralelo a uma placa plana e foi empregada por Blasius como escala para a espessura da camada limite, em sua solução por similaridade, [5-7]. É importante observar que, de acordo com este resultado:

δ_x é proporcional a $x^{0,5}$, a $U_\infty^{-0,5}$ e a $\nu^{0,5}$ (21)

A espessura aumenta com x e com a viscosidade. Quanto maior a velocidade menor a espessura da camada limite. Uma conseqüência importante da escala de espessura da camada limite é o coeficiente de atrito, $C_{f,L}$, definido conforme a equação, a seguir:

$$C_{f,L} = \frac{\tau_{\sup}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \qquad (22)$$

Onde a tensão superficial, na parede, $\tau_{\sup}$, é definida através de:

$$\tau_{\sup} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} \qquad (23)$$

Cuja adimensionalização, é :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \mu \frac{U_\infty}{\delta} \quad \text{(aproximação à ordem de grandeza)}$$

Após substituição, na Eq. (21), obtém-se:

$$C_{f,L} = 2\frac{\mu \frac{U_\infty}{\delta}}{\rho U_\infty^2} = 2\frac{L}{\delta}\mathrm{Re}_L^{-1}$$

Substituindo-se $\dfrac{L}{\delta} = \sqrt{\mathrm{Re}_L}$, ver Eq. (18), chega-se a:

$$C_{f,L} \propto \mathrm{Re}_L^{-\frac{1}{2}} \tag{24}$$

Falta, ainda, a análise dimensional da equação da conservação da energia, Eq. (4). Neste caso, surge um novo termo, a espessura da camada limite térmica, δ_t. Para simplificar a análise, considera-se que as espessuras das camadas limites térmica e hidrodinâmica são a mesmas. Para realizar a análise dimensional, é necessário definir uma temperatura adimensional:

$$T^* = \frac{T - T_{\text{sup}}}{T_\infty - T_{\text{sup}}}$$

após substituição das variáveis adimensionais, chega-se a:

$$\frac{U_\infty}{L} u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{U_\infty \delta}{L} \frac{1}{\delta} v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \alpha \left(\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) \tag{25}$$

dividindo os termos da equação, acima, por $\frac{U_\infty}{L}$, chega-se a :

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \alpha \frac{1}{U_\infty L} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) \tag{26}$$

Como no caso da análise dimensional da equação da conservação da quantidade de movimento, também se demonstra que:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} << \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \tag{27}$$

Fazendo $\alpha \frac{1}{U_\infty L} = \left(\frac{\alpha}{\nu} \right) \left(\frac{\nu}{U_\infty L} \right) = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \frac{1}{\mathrm{Re}_L}$, obtém-se a equação simplificada da conservação da energia para a camada limite térmica de um escoamento paralelo a uma placa.

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}_L} \left(\frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) \tag{28}$$

as condições de contorno são:

em $y^* = 0$ e $0 \le x^* \le L$; $T^* = 0$ (29)

para $y^* \to \infty$, $T^* \to 1$

O produto dos números adimensionais, Pr e Re_L, representa o número de Peclet.

$$Pe = Pr\ Re_L$$

Comentários

A principal falha nos resultados apresentados por Incropera et DeWitt (1996), é a escolha da velocidade U_∞ e do comprimento L da placa como escalas para as velocidades adimensionais e as distâncias, respectivamente, nas direções x e y.
A escolha incorreta do comprimento de escala L para adimensionalizar a distância, na direção y, e da velocidade U_∞ para adimensionalizar a velocidade v, em y, impediu a Incropera et DeWitt [3] e Incropera et al. [4] de obter o comprimento de escala para a espessura da camada limite, Eq. (18'), e a escala para o coeficiente de atrito, $C_{f,L}$, conforme Eq. (24). Nas referências [3,4] este último resultado é, erroneamente, apresentado como sendo proporcional ao inverso do número de Reynolds, $C_{f,L} \propto \mathrm{Re}_L^{-1}$, embora, no capítulo 7, os resultados obtidos por Blasius estejam corretamente apresentados, ou seja, proporcional ao inverso da raiz quadrada do número de Reynolds, como aqui demonstrado, ver Eq. (24).

Nomenclatura

c_p	Calor específico	J/(kgK)
L	Comprimento da placa	m
p	Pressão	Pa
U_∞	Velocidade do escoamento antes de atingir a placa	m/s
u	Velocidade na direção x	m/s
v	Velocidade na direção y	m/s
x	Variável, com origem no início da placa, no sentido do escoamento	m
y	Variável, com origem na superfície da placa, em contato com o fluido, normal à placa.	m
α	Difusividade térmica	m^2/s
ν	Viscosidade cinemática	m^2/s
$\mu=\rho\nu$	Viscosidade dinâmica	Pa.s

Índices subscritos

∞	variável longe da superfície da placa
sup	superfície da placa

Parâmetros adimensionais

Re	Número de Reynolds	$\mathrm{Re} = \frac{\rho U_\infty L}{\mu} = \frac{U_\infty L}{\nu}$
Pr	Número de Prandtl	$\mathrm{Pr} = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$
Pe	Número de Peclet	Pe=Pr Re_D

ANEXO

Correção da Tabela 6.1 do livro de Incropera et DeWitt

Camada limite	**Equação de conservação**	**Condição de contorno**	
		y”=0	$y \to \infty$
Hidrodinâmica (ou do perfil de velocidade)	$u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\mathrm{Re}_L}\frac{L^2}{\delta^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$ Neste caso, falta o termo $\frac{L^2}{\delta^2}$	u’(x’,0)=0 v’(x’,0)=0	$u' \to 1$
Térmica (ou do perfil de temperatura)	$u'\frac{\partial T^*}{\partial x'} + v'\frac{\partial T^*}{\partial y'} = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}_L}\left(\frac{L^2}{\delta^2}\frac{\partial^2 T^*}{\partial y'^2}\right)$ Neste caso, falta o termo $\frac{L^2}{\delta^2}$	T^*(x’,0)=0	$T^* \to 1$

Referências

[1] Schlichting, H., Boundary-Layer Theory, McGraw-Hill, 1979.
[2] Passos, J.C., NT-1: Nota técnica sobre camada limite, 2007.
[3] Incropera, F.P., De Witt, D. P., Introduction to Heat Transfer, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1996.
[4] Incropera, F.P., De Witt, D. P., Bergman, T.L., Lavine, A.S., Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa, LTC, tradução da 6ª ed., Rio de Janeiro, 2008.
[5] Lienhard IV, J.H. and Lienhard V, J.H., A Heat Transfer Textbook, 2003. Disponível em: web.mit.edu/lienhard/www/ahtt.html
[6] Bejan, A., Transferência de Calor, ed., Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1996.
[7] Bejan, A., Convection Heat Transfer, John Wiley & Sons, 1984.