



Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Dissertação de Mestrado

**Método Integral e de Analogia Elétrica para a Solução
de Transferência de Calor Unidimensional de Sólido
com Ablação**

Autor: Walber Ferreira Braga

Orientadora: Marcia Barbosa Henriques Mantelli

Florianópolis, Novembro de 2002.

Método Integral e de Analogia Elétrica para a Solução de Transferência de Calor Unidimensional de Sólido com Ablação

Walber Ferreira Braga

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

MESTRE EM ENGENHARIA

Especialidade Engenharia Mecânica, Área de Concentração de Engenharia e Ciências
Térmicas e, aprovada em sua forma final pelo curso de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica.

Prof. Marcia B. H. Mantelli, Ph. D.
Orientadora

Prof. José Antônio Bellini da Cunha Neto, Dr.
Chefe do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC

Banca Examinadora

Prof. Paulo César Philippi, Dr. Ing.
Depto. Eng. Mecânica / UFSC (Presidente da Banca)

Prof. Igor Mozolevski, Ph.D.
Depto. Matemática / UFSC

Prof. João Luiz Filgueiras de Azevedo, Ph.D.
IAE /CTA

“A caminhada nada mais é que uma sucessão de primeiros passos”.

(Anônimo)

A Deus

Pelas oportunidades na vida

Que me fizeram chegar até aqui.

Aos meus pais,

Pelo carinho e auxílio

No desenvolvimento da paixão pelo estudo.

À minha Carol,

Pelo amor, companheirismo e apoio,

Sem os quais a caminhada seria muito mais longa.

Aos meus irmãos,

Que de diferentes formas

Sempre me incentivaram a chegar mais longe.

Agradecimentos

À minha orientadora e amiga, Marcia Barbosa Henriques Mantelli, pela orientação e aconselhamentos sempre permeados de amizade, responsabilidade e confiança que ajudaram a construir muito mais do que está escrito aqui.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSC pela acolhida e auxílio na elaboração deste trabalho.

Aos professores que encontrei ao longo do curso, pelos ensinamentos, que foram muito além das matérias.

Aos meus colegas de curso, pelas conversas sob os mais diversos assuntos que ajudaram, sob diversos aspectos, o desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos do Centro Técnico Aeroespacial e do Instituto Tecnológico de Aeronáutica pelo apoio e amizade que ajudaram no amadurecimento dos conhecimentos que tem nesta dissertação uma pequena amostra.

Aos amigos de Florianópolis e de Porto Alegre que me apoiaram nos momentos difíceis, entenderam as minhas ausências e sempre se lembraram de tentar me trazer de volta ao convívio.

Ao CNPq e a CAPES pelo apoio e suporte financeiro ao desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

A condução de calor transiente em um sólido durante o processo de ablação representa uma área de grande importância tecnológica. Problemas deste tipo são inerentemente não-lineares e envolvem fronteiras móveis não conhecidas a priori. Devido a estes fatores, soluções analíticas exatas para a transferência de calor transiente relativa ao fenômeno ablativo são difíceis de serem obtidas e praticamente inexistentes na literatura. Apenas soluções numéricas e aproximações analíticas são encontradas e necessitam de considerável processamento computacional, mesmo no caso de modelos simplificados. Este trabalho traz como contribuição o desenvolvimento de dois métodos analíticos, a saber, o método de analogia elétrica e o método de balanço de calor integral, para a solução do problema unidimensional de transferência de calor com ablação de materiais com propriedades constantes, com o intuito de se obter uma ferramenta de engenharia para projeto de sistemas de proteção térmica do tipo ablativo. É obtida uma solução analítica fechada para cada um dos métodos e estas são comparadas com resultados numéricos obtidos na literatura. Ambos os métodos apresentaram-se eficientes, especialmente para a determinação do posicionamento da frente de ablação.

Palavras chave: ablação, método integral, método de analogia elétrica, condução de calor transiente, solução analítica.

Abstract

Transient heat conduction in a solid undergoing ablation represents an area of great technological importance. Problems of this type are inherently nonlinear and involve a moving boundary that is not known a priori. Due to this fact, exact analytical solution for transient heat transfer in a solid followed by ablation is very difficult and practically nonexistent. Only numerical and approximate analytical solutions have been made available and they necessarily require considerable numerical computation, even if a simplified model of the problem is adopted for the study. The contribution of the present work is the development of two analytical methods, namely, an electrical analogy method and a heat balance integral method, for the solution of the one-dimensional transient heat conduction problem in a solid with constant thermal properties undergoing ablation. The main purpose of the work is to obtain an engineering tool to be used to design ablation thermal protection systems. Closed analytical solutions are obtained for both methods and they are compared with numerical results from the literature. Both methods showed to be efficient especially for the prediction of the ablation front.

Key words: ablation, integral method, electrical analogy method, transient heat conduction, analytical solution.

Índice

Índice Analítico

<i>Agradecimentos</i>	<i>iv</i>
<i>Resumo</i>	<i>v</i>
<i>Abstract</i>	<i>vi</i>
<i>Índice</i>	<i>vii</i>
Índice Analítico	vii
Índice de Figuras	x
Índice de Tabelas.....	xii
Lista de Símbolos.....	xiii
<i>1 Introdução</i>	<i>1</i>
1.1 O PNAE.....	1
1.2 O NCTS.....	2
1.3 O Presente Trabalho	3
<i>2 Revisão Bibliográfica</i>	<i>4</i>
2.1 Física da Entrada Atmosférica	4
2.1.1 Modelo de Atmosfera	5
2.1.2 Trajetória de Entrada	5
2.1.3 Escoamento Atmosférico	7
2.1.3.1 Zona de Escoamento Molecular Livre	8
2.1.3.2 Zona de Transição	8
2.1.3.3 Zona de Escoamento de Meio Contínuo	9
2.1.4 Gráfico de Trajetória x Efeito Termofísicos	11
2.2 Sistemas de Proteção Térmica.....	12
2.2.1 Sistema Ativo	13
2.2.1.1 Transpiração	13

2.2.1.2	Regeneração	13
2.2.1.3	Tubos de Calor	13
2.2.2	Sistema Passivo	14
2.2.2.1	Poço de Calor	14
2.2.2.2	Ablação.....	14
2.2.2.3	Reradiação	15
2.2.3	Situação do Satélite Recuperável Brasileiro	16
2.3	Modelagem Matemática do Fenômeno de Ablação	16
2.3.1	Desenvolvimento Histórico.....	16
2.3.2	Desenvolvimento no Brasil	18
2.3.3	Formulações Básicas.....	19
2.4	O Método de Analogia Elétrica para Problemas Transientes	19
3	<i>Modelos Matemáticos</i>	20
3.1	Modelo Físico.....	20
3.2	Modelos Matemáticos	21
3.2.1	Método Integral.....	23
3.2.1.1	Período Pré-Ablativo	24
3.2.1.2	Período Ablativo	27
3.2.2	Método Analogia Elétrica	34
3.2.2.1	Período Pré-Ablativo	38
3.2.2.2	Período Ablativo	41
4	<i>Comparação Entre Resultados Teóricos e Solução da Literatura</i>	49
4.1	Solução Numérica de Blackwell	49
4.2	Solução pelo Método Integral	52
4.3	Solução pelo Método de Analogia Elétrica	53
4.4	Comparação entre os Tempos de Início de Ablação	54
4.5	Comparação entre Resultados de Blackwell e Método de Analogia Elétrica	57
4.6	Comparação entre Resultados de Blackwell e Método Integral	59

4.7	Comparação entre Método Integral e Método de Analogia Elétrica.....	62
4.7.1	Posição da Frente de Ablação	62
4.7.2	Posição da frente de penetração do calor	65
5	<i>Conclusões e Propostas de Desenvolvimentos Futuros</i>	69
6	<i>Referências Bibliográficas</i>	71
	<i>Apêndice A – Método de Balanço de Calor Integral</i>	75
	<i>Apêndice B – Método de Analogia Elétrica</i>	79
	<i>ANEXO 1 – Informações sobre a função Lambert W</i>	83

Índice de Figuras

Figura 1 – Definição das zonas do escoamento em função da altitude e do número de Knudsen.	7
Figura 2 – Escoamento supersônico.	10
Figura 3 – Gráfico de altitude em função da velocidade com zonas de fenômenos termofísicos.	12
Figura 6 – Circuito elétrico representado pela Eq. (74).	37
Figura 7 – Circuito elétrico representado pela Eq. (74) com as equações de contorno do período pré-ablativo.	39
Figura 8 – Circuito elétrico representado pela Eq. (74) com as equações de contorno do período ablativo.	42
Figura 9 – Gráfico original de Blackwell (1988) que será utilizado como referência. ...	50
Figura 10 – Gráfico para obtenção do valor n para o cálculo de t_A	56
Figura 11 – Distribuição de temperaturas obtidas pelo método de analogia elétrica para diversos valores de n	57
Figura 12 – Distribuição de erro entre a solução do método de analogia e os perfis de temperatura de Blackwell para diversos valores de n	58
Figura 13 – Distribuição de erro entre os perfis de temperatura de Blackwell e a solução do método integral para diversos valores de n	60
Figura 14 – Distribuição de Temperatura do Método Integral e de Blackwell.	61
Figura 15 – Posição da frente de ablação em função do tempo calculado pelo método integral.	63
Figura 16 – Posição da frente de ablação em função do tempo calculado pelo método de analogia.	64
Figura 17 – Posição da frente de ablação em função do tempo com os métodos integral e de analogia.	64
Figura 18 – Posição da frente de penetração do calor em função do tempo calculado pelo método integral.	65
Figura 19 – Posição da frente de penetração do calor em função do tempo calculado pelo método da analogia.	66
Figura 20 – Posição da frente de penetração do calor em função do tempo calculado pelos métodos integral e da analogia.	67

Figura 21 – Posição das frentes de penetração do calor e de ablação e a posição da penetração relativa em função do tempo calculadas pelo método integral com $n=10$ 68

Índice de Tabelas

Tabela 1 – Associação de Termos da Eq. (73) com Componentes Elétricos.....	36
Tabela 2 – Dados utilizados por Blackwell.....	50
Tabela 3 – Estatística de escala fornecida pelo SACRID [®]	52
Tabela 4 – Expressões utilizadas para a solução teórica do problema de ablação através do método de solução integral.....	52
Tabela 5 – Expressões utilizadas para a solução teórica do problema de ablação utilizando o método de analogia elétrica.	53
Tabela 6 – Análise de erro da solução do método integral.	60

Lista de Símbolos

Altura do veículo a partir do solo da Terra	h
Ângulo entre o horizonte local e o vetor velocidade do veículo	\mathbf{g}
Área de referência	A
Calor latente de ablação efetivo	I
Caminho médio entre colisões das partículas	I_m
Capacidade calorífica a pressão constante	c_p
Capacitância elétrica global	C
Coefficiente balístico alternativo	\mathbf{b}_m
Coefficiente balístico	\mathbf{b}
Coefficiente de arraste	C_D
Coefficiente de arraste zero	C_{D_0}
Coefficiente de sustentação	C_L
Coefficiente de sustentação máximo	C_L^*
Condutividade térmica	k
Coordenada espacial	x
Coordenada temporal	t
Densidade atmosférica	\mathbf{r}_a
Densidade	\mathbf{r}
Dimensão característica do escoamento	L
Fluxo de calor	q''
Fonte de corrente relacionada ao calor latente de ablação	L
Fonte de corrente relacionada ao fluxo de calor	q''
Fonte potencial relacionada a frente de ablação	F_A
Fonte potencial relacionada a frente de penetração do calor	F_P
Fonte potencial relacionada a temperatura de ablação	T_A
Função auxiliar	F
Grau da função do perfil de temperatura	n
Massa do veículo	m
Módulo da aceleração da gravidade	g

Número de Knudsen	Kn
Número de Mach	M_{∞}
Número inverso de Stefan	n
Parâmetros temporais	A e B
Penetração relativa	u
Penetração relativa no início do fenômeno de ablação	u_A
Penetração relativa no início do processo	u_O
Posição da frente de ablação	d_A
Posição da frente de penetração do calor	d_P
Posição da frente de penetração do calor no início do processo	d_{PO}
Posição da frente de ablação no início do processo	d_{AO}
Posição relativa da temperatura média	f
Potencial elétrico na posição da frente de ablação	T_2
Potencial elétrico na posição da frente de penetração do calor	T_1
Potencial elétrico na posição da temperatura média	\bar{T}
Raio equatorial da Terra	R_C
Resistência elétrica relacionada a frente de ablação	R_A
Resistência elétrica relacionada a frente de penetração do calor	R_P
Temperatura	T
Temperatura de ablação	T_A
Temperatura inicial	T_O
Temperatura média	\bar{T}
Tempo de início do fenômeno de ablação	t_A
Tempo de início do processo	t_O
Variável auxiliar	t
Velocidade	V
Velocidade do som no meio	a
Velocidade relativa entre o escoamento e a superfície do veículo	V_{∞}

1 Introdução

1.1 O PNAE

O Programa Nacional de Atividades Espaciais (PNAE) foi criado em agosto de 1996 com o objetivo de organizar as atividades espaciais a serem desenvolvidas no Brasil. Este programa, feito de acordo com as diretrizes estabelecidas pela Política Nacional de Atividades Espaciais, leva em consideração as capacitações laboratoriais e de pessoal, disponíveis nas indústrias, institutos de pesquisa e nas universidades do país. Concebido inicialmente para cobrir um período de dez anos e ser revisado periodicamente tem, na atual versão, uma abrangência até 2007. Essa versão, regulamentada em 1998, inclui em suas metas a implementação do Projeto de Microgravidade, que objetiva a criação de oportunidades para a realização de experimentos em ambiente de microgravidade.

Dentro desse projeto, foi realizado, no período de 19 a 21 de maio de 1999, no Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), o 1º Workshop Brasileiro sobre Microgravidade, onde foram apresentados os seguintes ambientes para testes:

- Manobras parabólicas de aeronaves, com tempos de gravidade reduzida de até vinte e cinco segundos;
- Plataformas suborbitais, para testes de até dez minutos;
- Satélites recuperáveis, para testes de até vinte dias;
- Vôos tripulados do ônibus espacial, para testes de até vinte dias;
- Estação Espacial Internacional, para períodos longos.

Outro projeto previsto nas metas do PNAE é o projeto UNIESPAÇO que visa a formação de núcleos capacitados, em universidades ou instituições congêneres, para o desenvolvimento de subsistemas necessários aos projetos do PNAE.

Foi realizada uma chamada de projetos no início de 2000, em diversas áreas temáticas da área espacial, entre elas, a área de satélites recuperáveis, para realização de experimentos científicos e tecnológicos de média duração em ambiente de microgravidade. Esta chamada visava o desenvolvimento de experimentos a serem realizados em três áreas temáticas, a saber:

1. Aerotermodinâmica de reentrada atmosférica,

Dentro deste tema, os seguintes tópicos foram contemplados:

- Caracterização e modelagem do ambiente termo-físico-químico de gases rarefeitos a altas velocidades;
- Modelagem e cálculo de escoamentos a alta velocidade sobre configurações típicas de reentrada atmosférica;
- Verificação experimental das características aerotermodinâmicas.

2. Materiais e estruturas em ambientes de reentrada atmosférica,

Neste tema, os seguintes tópicos foram selecionados para estudo:

- Especificação e desenvolvimento de materiais de proteção térmica;
- Concepção e dimensionamento de escudos térmicos ablativos e não-ablativos;
- Modelagem termo-estrutural de estruturas de veículos de reentrada sob intenso aquecimento e altos gradientes de temperatura.

3. Dinâmica e controle orbital e de reentrada induzida.

Os seguintes tópicos foram sugeridos para desenvolvimento:

- Estudos e modelagem da dinâmica e do controle de altitude orbital e de manobras de apontamento para reentrada;
- Algoritmos e estratégias de controle para indução e vôo de reentrada;
- Concepção de sistemas propulsivos de indução de reentrada e de controle de altitude.

1.2 O NCTS

O Núcleo de Controle Térmico de Satélites (NCTS), pertencente ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina, tem atuado no desenvolvimento de dispositivos para controle térmico de satélites desde 1990. Diversos projetos foram financiados pela Agência Espacial Brasileira, visando equipar o laboratório de infra-estrutura para o desenvolvimento de pesquisas na área de engenharia espacial. O NCTS participou da chamada de projetos realizada no ano 2000, sendo contemplado com recursos que possibilitaram a realização, na Universidade Federal de Santa Catarina, do “Workshop on Thermal Technology for the Brazilian Reentry Program”, realizado no período de 20 a 22 de novembro de 2000.

Neste Workshop, discutiu-se que, para o desenvolvimento dos sistemas de proteção térmica (SPT) dos satélites recuperáveis, o estudo de seu comportamento térmico na reentrada, assim como a correta determinação das propriedades termofísicas dos materiais a serem empregados nos escudos térmicos, devem ser perfeitamente conhecidos. Estes dados não são normalmente disponibilizados pelos países que detêm tecnologia nesta área por serem considerados estratégicos.

1.3 O Presente Trabalho

O presente trabalho traz como contribuição o desenvolvimento e resolução analítica de dois modelos matemáticos (analogia elétrica e método integral) para a condução de calor unidimensional em materiais sólidos com propriedades termofísicas constantes e homogêneas sujeito a mudança de fase, baseados no estudo do comportamento térmico destes materiais.

Estes modelos podem ser utilizados como ferramentas de pré-projeto para SPTs com mudança de fase, dentro das necessidades apresentadas no PNAE, ou como modelos diretos para o desenvolvimento de métodos inversos que possibilitem a determinação de propriedades termofísicas de materiais, conforme necessidade detectada no workshop realizado pelo NCTS.

Dentro deste enfoque, este trabalho é dividido em três partes principais. No Capítulo 2, é apresentada uma revisão bibliográfica, visando estabelecer o estado da arte na área de fenômenos físicos e sistemas de proteção térmica para veículos de reentrada. Serão ainda apresentados neste capítulo os modelos matemáticos encontrados na literatura. No Capítulo 3, serão apresentados os modelos físico e matemático desenvolvidos no presente trabalho. Os resultados obtidos são comparados com resultados numéricos encontrados na literatura no Capítulo 4. No Capítulo 5, são apresentadas as conclusões obtidas, assim como são apresentadas as sugestões para desenvolvimentos futuros.

2 Revisão Bibliográfica

Neste capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica enfocando primeiro os fenômenos físicos de mudança de fase que ocorrem com o material de proteção térmica. Depois são abordados os modelos físicos da atmosfera e os escoamentos dos gases, assim como as trajetórias dos veículos de reentrada, contextualizando os satélites do PNAE. Apresentam-se, a seguir, os fenômenos esperados para os satélites brasileiros, assim como os modelos matemáticos desenvolvidos para o comportamento térmico do material de proteção.

2.1 Física da Entrada Atmosférica

Considera-se de vital importância, para o sucesso de qualquer projeto que envolva o retorno de algum material do espaço, o conhecimento dos efeitos termofísicos que o veículo transatmosférico (satélites, mísseis, espaçonaves) estará sujeito no processo de entrada atmosférica, sob o risco de perda do material experimental e/ou vidas humanas que estarão a bordo do veículo.

Normalmente, no processo de análise de entrada, os fenômenos envolvidos, tais como escoamento do fluido (ar) ao redor do veículo, são modelados. Este fluido precisa ser bem caracterizado, com as suas propriedades físicas determinadas. Para isto, necessita-se de um modelo físico da atmosfera. Uma vez obtidas as propriedades do fluido, pode-se estudar a trajetória de entrada e obter as velocidades relativas entre o fluido e o veículo.

Com as propriedades do fluido e as velocidades determinadas, pode-se caracterizar o escoamento e encontrar os efeitos termofísicos presentes ao redor do veículo durante processo de entrada atmosférica. Entre os efeitos físicos possíveis podemos citar: escoamento com não-equilíbrio termo-químico, ionização parcial dos gases e a dissociação de espécies químicas, entre outros. Estes efeitos estão intrinsecamente acoplados com a velocidade relativa do veículo e as propriedades do fluido.

Sendo assim, novas propriedades do fluido são calculadas e a trajetória é novamente analisada levando-se em consideração os efeitos termofísicos, obtendo-se novas velocidades. Este ciclo iterativo continua até que sejam encontrados resultados de velocidades e efeitos termofísicos satisfatoriamente convergentes.

2.1.1 Modelo de Atmosfera

No processo de entrada atmosférica, o modelo atmosférico adotado normalmente é da atmosfera padrão. Regan *et al.* (1993) adota em seus trabalhos os padrões da *World Meteorological Organization* (WMO), que considera a variação da temperatura, pressão e densidade funções unidimensionais da altitude. Esta atmosfera padrão representa as condições de um ano característico em um local de latitude média. Um modelo de atmosfera padrão muito referenciado e que atende os requisitos da WMO é o *U.S. Standard Atmosphere* de 1976. Este modelo cobre a atmosfera terrestre do nível do mar até 1000 km de altura em uma latitude de 45° N.

2.1.2 Trajetória de Entrada

A trajetória de entrada de um veículo transatmosférico pode ser determinada adotando-se diferentes modelos físicos, de acordo com a precisão necessária. Para um cálculo mais imediato, utilizam-se as leis de Kepler para a determinação da trajetória. Neste caso, porém, conforme relata Regan *et al.* (1993), levam-se em conta apenas os efeitos da gravidade da Terra.

Em um modelo um pouco mais completo, deve-se levar em consideração as forças aerodinâmicas provenientes da interação entre o veículo e a atmosfera. Essas forças começam a ser importantes por volta de 60 km de altitude, apresentando a mesma ordem de grandeza da força gravitacional. Para altitudes muito mais baixas elas são tão intensas que a ação da força gravitacional, em alguns casos, pode ser desconsiderada.

Vários outros efeitos devem ser levados em consideração se o objetivo é descrever trajetórias de entrada completas, tais como: o controle de vôo da entrada, o número de graus de liberdade possíveis, etc.

Quando se pretende realizar uma primeira análise de trajetórias de entrada planas e não controladas, normalmente se considera o veículo como sendo uma partícula, para a qual as equações de cinemática são válidas. Estas equações, após alguma manipulação algébrica, apresentada em Regan *et al.* (1993), ficam na forma:

$$\frac{dV}{dt} = -\left(\frac{\mathbf{r}_a g}{2\mathbf{b}}\right) \left[1 + \left(\frac{C_L}{C_L^*}\right)^2\right] V^2 + g \sin(\mathbf{g}), \quad (1)$$

$$V \frac{d\mathbf{g}}{dt} = -\left(\frac{\mathbf{r}_a g}{2\mathbf{b}}\right) \left[1 + \left(\frac{C_L}{C_L^*}\right)^2\right] \left(\frac{C_L}{C_D}\right) V^2 + \cos(\mathbf{g}) \left[g - \frac{V^2}{R_e + h}\right], \quad (2)$$

$$\frac{dh}{dt} = -V \sin(\mathbf{g}), \quad (3)$$

onde V é a magnitude da velocidade, \mathbf{g} é o ângulo entre o horizonte local e o vetor velocidade \vec{V} , t é o tempo, g é a aceleração da gravidade, \mathbf{r}_a é a densidade atmosférica, calculada de acordo com o modelo atmosférico adotado, R_e é o raio equatorial da Terra, h é a altura do veículo a partir do solo do planeta, C_L é o coeficiente de sustentação, C_L^* é o coeficiente de sustentação máximo, C_D é o coeficiente de arrasto, os três últimos calculados a partir da forma do veículo e, finalmente, \mathbf{b} é o coeficiente balístico. Este último coeficiente é definido, conforme Regan *et al.* (1993), pela equação:

$$\mathbf{b} = \frac{mg}{C_{D_0} S}, \quad (4)$$

onde m é a massa do veículo, C_{D_0} é o coeficiente de arrasto do veículo considerando o caso de sustentação zero e S é a área de referência, normalmente a área transversal máxima do veículo. O coeficiente \mathbf{b} , cuja unidade é Pa (N/m^2), relaciona a força induzida pelo campo gravitacional e a perda causada pelo efeito de arrasto. Se a unidade a ser utilizada for kg/m^2 , a expressão alternativa para este coeficiente, \mathbf{b}_m , é:

$$\mathbf{b}_m = \frac{\mathbf{b}}{g}. \quad (5)$$

Neste caso obtém-se a trajetória de entrada planar não controlada e, então, se define o escoamento ao redor do veículo.

2.1.3 Escoamento Atmosférico

Conforme Regan *et al.* (1993), quando um veículo transatmosférico penetra na atmosfera da Terra, este parte de um meio, onde o número de partículas dos gases que constituem a atmosfera é muito baixo para outro, onde esse número é muito maior. Quando o número de partículas é baixo, a distância que a partícula percorre entre uma colisão e outra é grande e, conseqüentemente, a taxa de colisão é baixa. Na medida em que o número de partículas aumenta, aumenta também a taxa de colisões entre elas e diminui a distância percorrida entre as colisões. O parâmetro adimensional denominado número de Knudsen, Kn , é definido como a razão entre o caminho livre médio percorrido entre as colisões, l_m , e a dimensão característica do escoamento, L , sendo dado pela seguinte equação:

$$Kn = \frac{l_m}{L} = \frac{\text{caminho livre médio percorrido}}{\text{dimensão característica}}. \quad (6)$$

Através deste parâmetro podemos definir três zonas da entrada atmosférica: zona de escoamento molecular livre, zona de transição e zona de escoamento contínuo. Na zona de escoamento molecular livre, Kn é muito maior que 1,0 enquanto que, na de escoamento de meio contínuo, é muito menor que 1,0. Podemos observar essa distribuição em relação à altitude na Fig. (1).

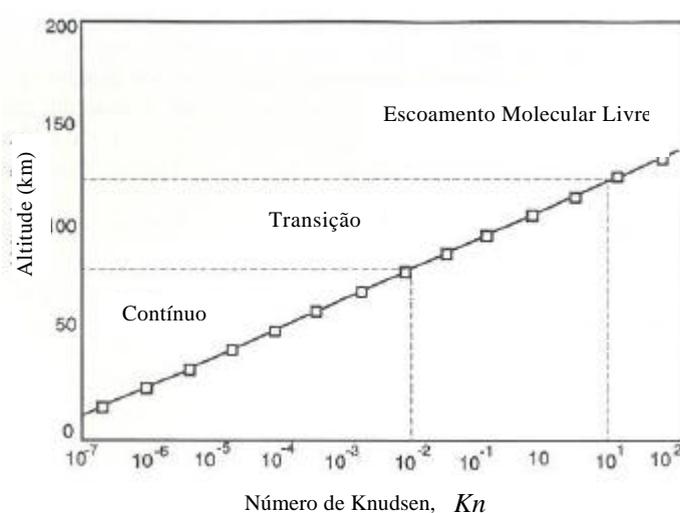


Figura 1 – Definição das zonas do escoamento em função da altitude e do número de Knudsen.

2.1.3.1 Zona de Escoamento Molecular Livre

De acordo com Regan *et al.* (1993), na zona de escoamento livre o veículo transatmosférico não perturba o escoamento normal, pois o caminho médio percorrido é muito maior que as dimensões características do mesmo e as partículas que colidem com as superfícies do veículo irão colidir com outras partículas distantes do veículo. Por isso, a transferência de quantidade de movimento e energia é dominada pelas colisões das partículas com a superfície, sendo desprezível a perturbação causada pela interação entre as partículas refletidas e incidentes. Ainda conforme Regan *et al.* (1993), a interação entre molécula/partícula e superfície ainda não é bem entendida. Existem modelos propostos sobre essa interação, entre os quais, os mais usados são os modelos de reflexão especular e de reflexão difusa, postulados por Maxwell em 1879.

2.1.3.2 Zona de Transição

Durante o processo de entrada do veículo na atmosfera, as partículas refletidas pela superfície deste colidem com partículas livres, influenciando as propriedades do gás à frente e ao redor do veículo. Quando a altitude diminui, a densidade de partículas presentes aumenta, diminuindo o caminho médio percorrido por elas e, conseqüentemente, diminuindo o número de Knudsen até esse ser muito pequeno e o escoamento possa ser considerado contínuo.

Durante este processo de transição entre o escoamento molecular livre e o escoamento de meio contínuo, ocorre o aparecimento de uma região de forte interação entre as partículas que acaba por alterar as características do escoamento e dar origem à onda de choque que se forma a frente do veículo no escoamento de meio contínuo.

Assim, define-se a zona de transição como um intervalo no número de Knudsen, aproximadamente entre 10, onde as interações entre as partículas começam a se tornar importantes, e 0,01, momento em que não é mais possível distinguir as partículas. No presente caso essa diferenciação pode ser detectada através das características da onda de choque formada.

De acordo com a NASA (1971), no final da zona de escoamento de moléculas livres a onda de choque se apresenta como uma área fina, mal definida e completamente viscosa, e na zona de escoamento contínuo passa a se apresentar de uma forma bem definida por uma forte descontinuidade e duas regiões: a primeira composta

por uma fina camada limite viscosa junto à superfície e seguinte, não viscosa e mais afastada da superfície.

Ainda conforme a NASA (1971), veículos transatmosféricos com sustentação podem receber partes significativas da sua carga térmica na zona de transição. Efeitos do não-equilíbrio termoquímico também podem ser importantes e devem, se possível, ser levados em conta uma vez que a densidade dos gases é suficientemente baixa para produzir taxas de reação química da mesma ordem do tempo característico do escoamento. Além disso, a análise clássica do meio contínuo pode não ser válida para essa zona, para a qual foram desenvolvidos métodos para escoamentos em meios rarefeitos, tais como a simulação direta com o método de Monte Carlo.

2.1.3.3 Zona de Escoamento de Meio Contínuo

Quando o número de Knudsen se torna muito pequeno, o caminho médio livre entre as partículas é praticamente nulo, o que caracteriza um meio contínuo. No meio contínuo a análise do escoamento é baseada em um outro parâmetro, o número de Mach, M_∞ , dado pela equação:

$$M_\infty = \frac{V_\infty}{a}, \quad (7)$$

onde V_∞ é a velocidade relativa entre o escoamento, em uma região sem influência da presença do veículo, e a superfície do mesmo e a é a velocidade do som do meio.

Conforme apresentado em Regan *et al.* (1993), o escoamento no meio contínuo pode ser dividido novamente em seções de acordo com o valor de M_∞ . Quando o valor de M_∞ se situar entre 0 e 0,3 o escoamento pode ser considerado incompressível. No caso de M_∞ maior que 0,3 e se, em nenhum ponto do escoamento ao redor do veículo este número não exceder 1,0, o escoamento será considerado compressível subsônico. Quando o valor de M_∞ for aproximadamente 1,0 o escoamento será transônico. Para valores de M_∞ entre 1,0 e 5,0 o escoamento será supersônico e para valores maiores de 5,0 será hipersônico. É importante notar que o valor do número de Mach que delimita a fronteira entre o escoamento supersônico e o hipersônico varia de autor para autor.

Do ponto de vista da física da dinâmica dos fluidos, ainda conforme Regan *et al.* (1993), a origem da diferença entre o escoamento supersônico para o hipersônico é que, neste último, existem uma série de efeitos que não podem mais ser desprezados pelas análises, são eles: efeitos de alta temperatura, interação viscosa, gradientes de entropia e região de choque.

No processo de entrada na atmosfera, no momento em que o veículo sai da zona de transição e entra na zona de escoamento contínuo, a velocidade ainda é muito grande em relação à velocidade do som no meio, por isso o escoamento ao redor do veículo é hipersônico. Depois disto, por ação da transferência de energia da forma cinética para a térmica, a velocidade do veículo diminui e o escoamento torna-se supersônico, transônico e, finalmente, subsônico.

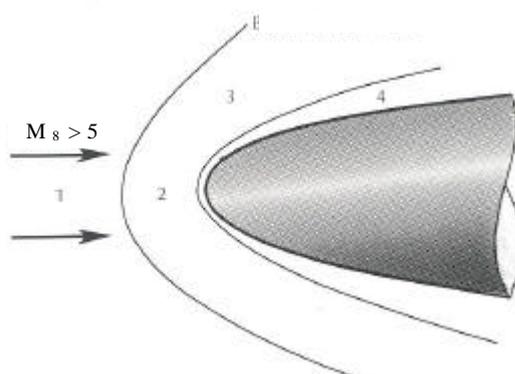


Figura 2 – Escoamento supersônico.

Na Fig. (2) podemos observar as áreas existentes em um escoamento supersônico; a zona 1 refere-se ao escoamento livre, a zona 2 ao escoamento subsônico invíscido, a zona 3 ao escoamento supersônico invíscido e, finalmente, a zona 4 à camada limite viscosa.

Quando o escoamento é supersônico ou hipersônico, existe uma compressão dos gases constituintes da atmosfera na parte frontal do veículo. Essa compressão faz com que se eleve a temperatura desses gases nessa região e na parte interna da onda de choque, uma vez que as moléculas constituintes dos gases aumentam a sua vibração. No caso de temperaturas muito altas, podem ocorrer diversos fenômenos termofísicos no escoamento e o fluido não pode mais ser considerado termicamente perfeito. De acordo com Regan *et al.* (1993), quando a temperatura do ar está por volta dos 600K, ou quando a velocidade do veículo em relação ao ar é maior que 1 km/s, (ver Bertin, 1994), a energia proveniente da vibração das moléculas começa a ser importante.

Ainda de acordo Bertin (1994), para o veículo com velocidade de 1,8 km/s a 2,5 km/s, a temperatura do ar se apresenta na ordem de 2500 K onde começa a ocorrer a dissociação do Oxigênio ($O_2 \rightarrow 2O$), acima de 4,5 km/s, o ar a 4000 K, a dissociação do Nitrogênio ($N_2 \rightarrow 2N$) e acima de 9 km/s, o ar a 9000 K, a ionização dos átomos começa a se tornar importante. Para a NASA (1971), outro fenômeno importante ocorre quando a velocidade for superior a 11 km/s; nesse caso a transferência de calor por radiação, proveniente da onda de choque, deve ser considerada.

Com o aumento da temperatura, o ar diminui a sua densidade e, conseqüentemente, a camada limite aumenta a sua espessura, de forma a manter um mesmo fluxo mássico ao redor do veículo. Para o caso do escoamento supersônico, Regan *et al.* (1993) reportam que a espessura dessa camada é desprezível e que a pressão sobre a borda da camada limite pode ser considerada igual à da atmosfera fora da onda de choque. Já para o caso do escoamento hipersônico, essa espessura aumenta muito e não pode ser mais desprezada. O escoamento invíscido fora da camada limite é alterado; este, por sua vez, altera o escoamento na própria camada limite. Sendo assim, não é mais possível estudar as duas regiões separadamente. Esse acoplamento é chamado de interação viscosa, que leva a um aumento do atrito e da troca térmica do escoamento com a superfície do veículo.

2.1.4 Gráfico de Trajetória x Efeito Termofísicos

Tendo-se a trajetória de entrada atmosférica determinada, pode-se prever a ordem de grandeza dos efeitos termofísicos para os quais o veículo deve estar devidamente preparado para enfrentar. No gráfico da Fig. (3), obtidos do relatório da NASA (1989) e reproduzido por Venkatapathy (2000), são apresentadas diversas trajetórias, típicas para veículos de reentrada. Este gráfico relaciona a altitude e a velocidade dos veículos em cada trajetória e apresenta os efeitos termofísicos aos quais são submetidos os veículos nas mesmas. A cápsula Apollo, por exemplo, no retorno da Lua, reentrou com velocidade da ordem de 11 km/s, o que a levou a enfrentar ionização, além da dissociação de N_2 e O_2 .

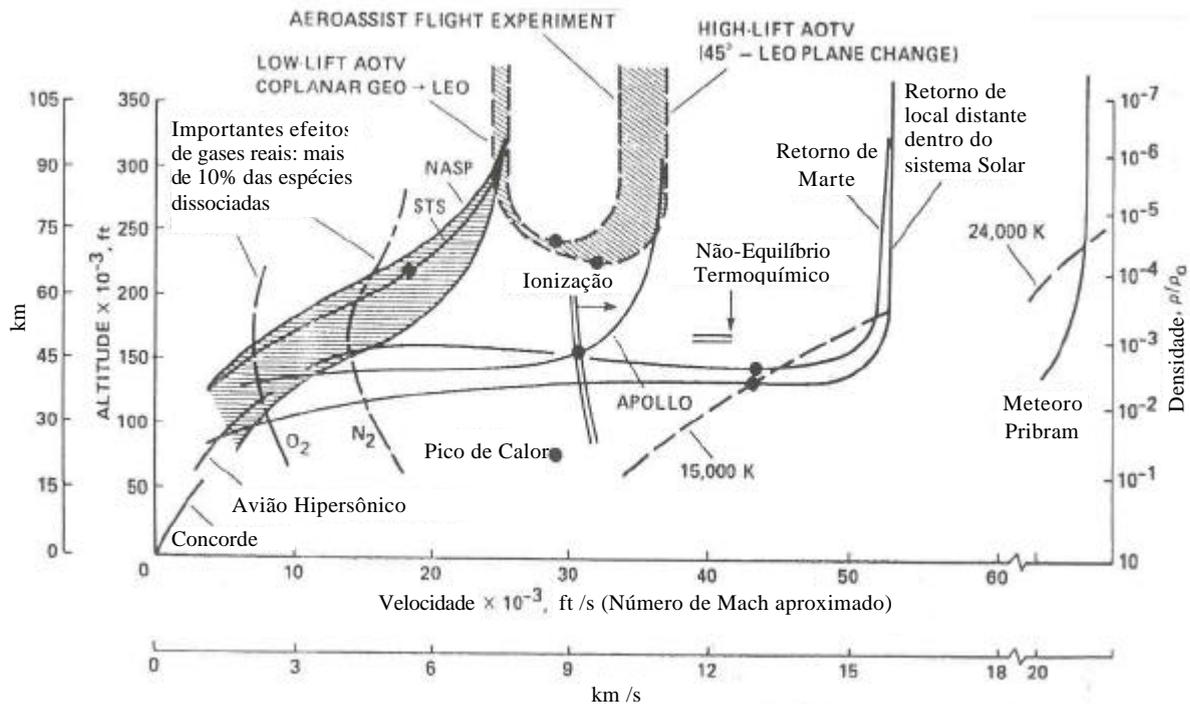


Figura 3 – Gráfico de altitude em função da velocidade com zonas de fenômenos termofísicos.

Um outro exemplo a ser considerado é a plataforma orbital brasileira, descrita por Moraes Júnior *et al.* (1997). Esta apresenta uma velocidade de órbita média de 7,6 km/s; considerando uma trajetória plana não controlada e uma velocidade máxima de 7,8 km/s. Para este caso deve-se considerar: a energia de excitação vibracional das moléculas, que têm forte influência na temperatura absoluta assim como a presença de oxigênio e nitrogênio dissociados. Estes efeitos afetam o sistema de proteção térmica provocando reações químicas, tais como oxidação e catálise na superfície.

2.2 Sistemas de Proteção Térmica

Conhecidos a trajetória e os fenômenos termofísicos aos quais o veículo está sujeito, pode-se calcular o fluxo de calor que atinge o veículo durante o processo de entrada atmosférica. A partir desse fluxo pode-se partir para o projeto do sistema de proteção térmica (SPT).

Conceitualmente, de acordo com Costa *et al.* (2001), os SPT podem ser classificados como ativos ou passivos. Os SPT ativos atuam diretamente no sistema (escoamento/ fluido) de forma a reduzir o fluxo térmico na superfície do veículo. Os SPT passivos, por sua vez, recorrem às suas propriedades termofísicas para obter essa redução.

2.2.1 Sistema Ativo

De acordo com Costa *et al.* (2001), três técnicas básicas principais podem ser utilizadas para o projeto de SPT ativos: transpiração, regeneração e tubos de calor.

2.2.1.1 Transpiração

Conforme apresentado em Costa *et al.* (2001), esse método consiste na exaustão de um gás a velocidade sônica ou supersônica, a partir da região frontal do veículo na direção contrária ao escoamento.

Esse jato, composto pelos gases exauridos a partir do veículo, forma um novo contorno para o escoamento, fazendo com que o escoamento seja fortemente perturbado e desviado do corpo do veículo. Desta forma, a onda de choque aparece destacada. Sobre a superfície do veículo surge um fluxo de baixa velocidade, o qual transporta o fluido expelido pela região frontal. No caso do fluido se encontrar a baixa temperatura, este formará uma película protetora na superfície que diminui o fluxo térmico incidente sobre o veículo.

2.2.1.2 Regeneração

Esse método utiliza-se de um circuito hidráulico com fluido refrigerante integrando à parte do veículo que deve ser resfriada com um trocador de calor, usualmente um radiador criogênico para o caso de veículos espaciais. Normalmente utilizado para o resfriamento de tubeiras, esse método não costuma ser aplicado nos SPT devido ao peso final, que é normalmente superior ao resultante a partir de outras opções tecnológicas.

2.2.1.3 Tubos de Calor

Ainda em estudo de viabilidade, esse método pretende utilizar os tubos de calor, já presentes no sistema de controle térmico do veículo, como um sistema auxiliar de proteção térmica, diminuindo o calor total que deve ser absorvido/ eliminado pelo SPT principal e homogeneizando as temperaturas de superfície.

Este processo é muito similar ao processo de regeneração, com a diferença de que, ao invés do circuito hidráulico o calor seria conduzido do SPT para o trocador de calor pelos tubos de calor que, além de serem mais leves, já são amplamente utilizados para o controle térmico do veículo. Maiores informações a respeito de tubos de calor e suas aplicações podem ser encontradas em Gilmore (2002).

2.2.2 Sistema Passivo

De forma geral, segundo Churchward (2000), os SPT passivos devem rejeitar o máximo calor possível e conduzir o mínimo de calor possível, com a mínima massa possível. Isto significa que se busca um SPT com máxima eficiência associada ao menor peso final. Normalmente, dois métodos estão integrados à essa filosofia: ablação e reradiação. Existe ainda um terceiro método, poço de calor, que será apresentado a seguir.

2.2.2.1 Poço de Calor

O método de poço de calor, de acordo com o que descreve Costa *et al.* (2001), utiliza materiais que possuam boa condutividade térmica e alto calor específico, de forma a que o calor gerado no processo de entrada atmosférica possa ser absorvido no SPT, sem um aumento excessivo da temperatura da estrutura interna do veículo.

Ainda conforme Costa *et al.* (2001), esse método foi utilizado em diversos veículos transatmosféricos na década de 60, tais como as cápsulas Mercury e o avião X-15. Atualmente o bordo de ataque do projeto X-20 é feito de modo a funcionar sob o mesmo princípio. O limitante desse método é o fluxo de calor máximo que o SPT pode absorver sem que se danifique, que, de acordo com a aplicação, pode ser insuficiente para um poço de calor de dimensões e peso razoável.

2.2.2.2 Ablação

O sistema de proteção térmica por ablação envolve o consumo parcial da proteção térmica por vários fenômenos físico-químicos, que absorvem o calor de tal maneira a proteger a estrutura do aquecimento externo. Normalmente utilizado para uma única missão, este sistema utiliza vários princípios físicos para proporcionar proteção térmica: radiação térmica da superfície quente do material ablativo, reações químicas, fusão, sublimação, vaporização, decomposição do material e bloqueio do fluxo de calor pelos gases de ablação num processo similar ao método de transpiração.

A principal função do material utilizado para esse tipo de SPT, chamado de material ablativo, é limitar a condução de calor para dentro do veículo de reentrada. Como apresenta Costa *et al.* (2001), de maneira geral, o processo ocorre a uma temperatura aproximadamente constante, denominada temperatura de ablação, correspondente à temperatura de mudança de fase do material ablativo. Com o aumento

do fluxo de calor incidente no material, ocorre o aumento da taxa de ablação, porém a temperatura de ablação permanece constante.

Os materiais ablativos devem ter como características principais uma baixa condutividade térmica e um alto calor latente de sublimação (mudança de fase do estado sólido para gasoso). Os materiais ablativos podem ser divididos em dois grupos principais: puros, apresentando apenas um tipo de material em sua composição, ou compostos, constituídos por mais de um material, normalmente matriz e resina.

Uma das características desejáveis nos materiais ablativos puros é não sofrer alterações termofísicas até que estes atinjam a temperatura de ablação.

Por outro lado, conforme Pardini (2002), os materiais ablativos compostos, também conhecidos por compósitos, são constituídos de uma matriz de fibra (normalmente de carbono ou sílica) e uma resina (normalmente fenólica ou carbonácea). Neste caso, durante o processo de ablação, aparecem três zonas bem distintas. A primeira, a partir da estrutura, é formada pelo material que não passou por nenhuma transformação, sendo chamada de zona de material virgem. A segunda, chamada zona de pirólise, é uma região onde ocorre sublimação da resina. No caso em que essa sublimação ocorrer a uma temperatura definida e constante, essa zona pode ser aproximada por uma superfície fictícia que separa a primeira da terceira zona. Na terceira zona existe a matriz de fibra, que forma um material poroso, por onde escoam, para fora do material, os gases produzidos na zona de pirólise. Essa zona é chamada de “char” ou carbonizada.

2.2.2.3 Reradiação

O método de reradiação utiliza materiais que não são consumidos para a proteção da estrutura interna do fluxo de calor externo. Esses materiais são normalmente utilizados para missões em que se deseja manter o máximo possível da integridade estrutural do veículo para vôos sucessivos. O ônibus espacial utiliza esse tipo de material. De acordo com Churchward (2000), as propriedades normalmente desejadas são:

- Baixa eficiência catalítica, de modo a diminuir o ganho de calor pelas paredes por absorção química;
- Alta emissividade, para que o máximo fluxo de calor possível seja disperso por radiação;

- Baixa difusividade térmica, para que, mesmo estando o SPT a alta temperatura, esta demore a penetrar na estrutura, aumentando o tempo transiente. Este alto tempo transiente provoca a necessidade de resfriamento da nave mesmo quando já pousada no solo, quando o calor poderá estar finalmente atingindo a estrutura do veículo.

2.2.3 Situação do Satélite Recuperável Brasileiro

A partir da geometria e a órbita previstas para estes satélites, conforme apresentado por Moraes *et al.* (1997), assim como o domínio da tecnologia de materiais ablativos existente no Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE) do Centro Tecnológico da Aeronáutica (CTA), de acordo com Pardini (2002), pressupõe-se à escolha preliminar do método ablativo para o SPT dos satélites recuperáveis brasileiros. Porém, o material ablativo a ser utilizado ainda não foi definido. Sejam quais forem os materiais a serem utilizados no Brasil, estes deverão ser completamente caracterizados termicamente, especialmente aqueles que serão desenvolvidos no país. Dentro desse processo de caracterização e como ferramenta de projeto, modelos físicos e matemáticos precisam ser desenvolvidos para a determinação do comportamento térmico dos processos envolvidos, obtendo-se desta forma perfis de temperaturas no interior do material, assim como a posição da fronteira, onde ocorre o processo de ablação.

2.3 Modelagem Matemática do Fenômeno de Ablação

A condução de calor transiente em um sólido durante o processo de ablação representa, como visto, uma área de grande interesse tecnológico. Problemas deste tipo são inerentemente não-lineares e envolvem uma fronteira móvel não conhecida a priori. De acordo com Chung *et al.* (1985) e Zien (1978), uma solução exata analítica para a transferência de calor transiente em um sólido com ablação é muito difícil de ser obtida. Apenas soluções numéricas e aproximações analíticas estão disponíveis e, normalmente, requerem um alto custo computacional, mesmo quando são utilizados modelos unidimensionais simplificados.

2.3.1 Desenvolvimento Histórico

Landau (1950) foi o primeiro a propor um problema idealizado de ablação que passou a ser conhecido como o Problema de Landau. Este pesquisador considerou as propriedades do material ablativo puro constantes, com uma das faces do material

aquecida por um fluxo de calor constante. O material produzido pela ablação (gases ou líquidos) foi considerado removido do processo, no mesmo instante em que foi criado, por meio de um escoamento, de forma a não interferir no fluxo de calor na superfície. Landau resolveu esse problema por integração numérica para um sólido semi-infinito.

Sunderland *et al.* (1961) apresentou o mesmo problema, utilizando-se o método de diferenças finitas para solucionar o caso onde o fluxo varia com o tempo. Goodman (1964) resolveu o problema de Landau usando o método de balanço integral do calor. Biot *et al.* (1964) usaram o método variacional para solucionar o problema com propriedades variáveis. Zien (1978) apresentou soluções aproximadas para o problema de Landau com dois perfis de fluxo variável com o tempo. As soluções foram obtidas através de método integral.

Chung *et al.* (1985) fizeram o estudo de três métodos, a saber: método de balanço integral, método integral de q -momento e método de diferenças finitas implícitas; para a ablação de um material finito, submetidos a quatro tipos de fluxos de calor variáveis com o tempo. Os métodos utilizados foram comparados, usando-se o método de diferenças finitas como referência, concluindo-se que os métodos de balanço integral e o da integral de q -momento são mais adequados para a determinação da espessura do material ablativo e da taxa de ablação do que para a previsão do perfil de temperatura no interior do material.

Hogge (1985) discutiu a aplicação da técnica de elementos finitos deformáveis a um problema de ablação bidimensional. Por sua vez, Hibbert *et al.* (1988) apresentaram uma solução baseada em uma formulação entálpica usando volumes finitos para problemas de mudança de fase, entre os quais pode ser enquadrada a ablação.

Blackwell (1988) adaptou o esquema de diferenças exponenciais de Spalding para a solução do problema de Landau usando a malha presa na superfície ablativa. O esquema foi implementado usando volumes finitos e o problema de ablação resolvido desta forma é usado como referência em muitos trabalhos, incluindo o presente.

Venkateshan *et al.* (1990) apresentaram um método de integração generalizada para a solução analítica do problema de ablação de um meio semi-infinito submetido a fluxo variável com o tempo. Neste trabalho de Venkateshan *et al.* são apresentados bons resultados para o caso de fluxos do tipo “Power Law” e para o caso de reradiação.

Storti (1995) considerou o problema de ablação de uma fase como sendo um problema de Stefan de duas fases. Uma fase correspondia ao material propriamente dito

e a outra a um material fictício que ocupa a região onde o primeiro material foi removido. Foi usado o método de elementos finitos para a solução desse problema.

Mohan *et al.* (1996) solucionou o problema de Landau com propriedades variáveis utilizando a representação de volumes finitos com esquema temporal adaptativo para a perseguição correta da resposta transiente não linear. Já Hogan *et al.* (1996), apresentaram a solução para o problema de ablação axissimétrica bidimensional. Para isso, o método de elementos de volumes finitos com malha móvel foi utilizado na discretização da equação da energia.

Katte *et al.* (2000) apresentaram um modelo bidimensional em coordenadas cilíndricas com o fluxo térmico variando axialmente e temporalmente. Neste modelo foi utilizado o inverso do número de Stefan como um calor latente adimensional e o problema foi solucionado pelo método de diferenças finitas.

Shih *et al.* (1997) apresentaram um modelo teórico para materiais compósitos que leva em consideração os efeitos de não equilíbrio térmico, propriedades variáveis com a temperatura, reação de pirólise e expansão termoquímica. Esse modelo é desenvolvido utilizando médias volumétricas e implementado através do método de volumes finitos.

2.3.2 Desenvolvimento no Brasil

No Brasil, os primeiros trabalhos encontrados sobre o assunto são do final da década de 80. Em 1989, houve o Seminário de Ciência e Tecnologia Aeroespacial, em São José dos Campos – SP, onde foram apresentados os trabalhos de Zaparoli (1989), que fez uma revisão dos modelos de ablação e dos métodos de solução numérica, e de Diniz *et al.* (1989), que mostraram a solução para o problema de ablação, utilizando o método da transformada integral generalizada.

Já na década de 90, diversos trabalhos foram desenvolvidos. A grande maioria destes trabalhos valeram-se da formulação entálpica e do método da transformada integral generalizada. O trabalho de Ruperti *et al.* (1991), que resolveu o problema de Landau, ou seja, ablação sem pirólise, pode ser considerado como representativo.

Outras técnicas de resolução do problema ablativo são apresentadas nos trabalhos de Silva Júnior *et al.* (1992), que utilizam o método de elementos de contorno e de Leite (1999), que apresenta uma análise por elementos finitos da concepção de Storti para o problema de ablação. Já Cotta *et al.* (2000) propõem uma abordagem do tipo “improved lumped differential” para o problema de Landau com fluxo constante, que é resolvida numericamente com o auxílio de um software de manipulação algébrica.

2.3.3 Formulações Básicas

O problema de ablação deve ser abordado como um processo de mudança de fase e para desenvolvê-lo, uma das seguintes formulações pode ser utilizada: formulação entálpica ou formulação de temperaturas. Na formulação entálpica, todo o domínio de cálculo é descrito da mesma maneira, tanto antes como após a posição de frente de mudança de fase. A mudança de fase aparece como um salto das propriedades do material analisado, em especial, a entalpia. Na formulação de temperaturas, o domínio de cálculo é dividido em n áreas, cada uma composta pelo material em uma determinada fase. Essas áreas são acopladas através de uma equação que descreve a frente de mudança de fase.

2.4 O Método de Analogia Elétrica para Problemas Transientes

O modelamento de sistemas térmicos utilizando a analogia entre problemas térmicos e elétricos se constitui numa poderosa ferramenta, bastante utilizada para problemas simples de transferência de calor, normalmente unidimensionais e em regime permanente. Porém, esta técnica não tem sido rotineiramente utilizada para problemas transientes. A grande vantagem deste método é que as equações resultantes são bastante simples e, dependendo do problema analisado, resultados precisos podem ser obtidos a um custo computacional e de tempo quase nulos.

O método de analogia elétrica se baseia na similaridade das equações entre os fenômenos de transferência de calor e de transferência de corrente elétrica. Liebmann *et al.* (1956) aponta Beuken (1937) e Paschkis *et al.* (1942) como os pioneiros na utilização dessa analogia para processos transientes, embora esses utilizassem o tempo real como variável independente, enquanto Liebmann fizesse uso de intervalos finitos de tempo. A utilização do intervalo finito de tempo possibilita que parâmetros sejam ajustados e flexibiliza o método, de modo que este possa ser empregado em problemas complexos.

Horvay (1960), embora não apresentasse referências ao trabalho de Liebmann *et al.* (1956), utilizou-se de concepção similar, onde o intervalo finito de tempo possibilita o ajuste dos parâmetros necessários. Nesse trabalho, Horvay solucionou o problema da transferência de calor, durante o congelamento de uma coluna de metal líquido. Um circuito elétrico, similar ao térmico foi escolhido para abordar o problema de lingotamento contínuo. De maneira similar, pode-se utilizar o mesmo método para o equacionamento do fenômeno de ablação dentro do modelo físico proposto.

3 Modelos Matemáticos

Serão apresentados neste trabalho dois modelos matemáticos desenvolvidos a partir de um mesmo modelo físico. Primeiramente o modelo físico adotado é apresentado. O primeiro modelo, denominado de integral, baseado no método do balanço integral do calor conforme descrito por Goodman (1964) é, então, descrito. A seguir o segundo modelo, denominado de analógico, desenvolvido a partir de idéias apresentadas no trabalho de Horvay (1960) sobre o congelamento de uma coluna líquida em crescimento, é detalhado.

3.1 Modelo Físico

O modelo físico adotado para um material sofrendo ablação em uma das faces é descrito nesta seção. O material ablativo simples, de um componente, é considerado semi-infinito sendo aquecido por uma fonte de calor uniforme na face aparente. No instante inicial, todo o material se encontra a uma temperatura constante uniforme, T_o . Com a incidência do calor proveniente da fonte, a temperatura de parte do material começa a aumentar. O comprimento desta parte do material é chamado de posição da frente de penetração do calor, d_p , a qual é definida como o local, dentro do material, que ainda não sofreu perturbação pelo fluxo de calor incidente da superfície (derivada da temperatura em relação ao espaço é zero). O fluxo de calor, gerado pela fonte, faz com que a temperatura na superfície aumente até atingir a temperatura de ablação, T_A , dando início ao processo de ablação. Durante o período de ablação, uma parte do calor incidente é utilizado para aquecer o material ainda não consumido e o restante é usado nos fenômenos de ablação, que ocorrem a um nível constante de temperatura T_A . Os fenômenos de ablação consomem uma parte do material que é instantaneamente removido, conforme modelo apresentado por Landau. O comprimento desta parte do material é chamado de posição da frente de ablação, d_A , a qual corresponde ao comprimento do material consumido pelo processo e indica a posição da fronteira física do material. Um esquema desse modelo pode ser observado na Fig. (4).

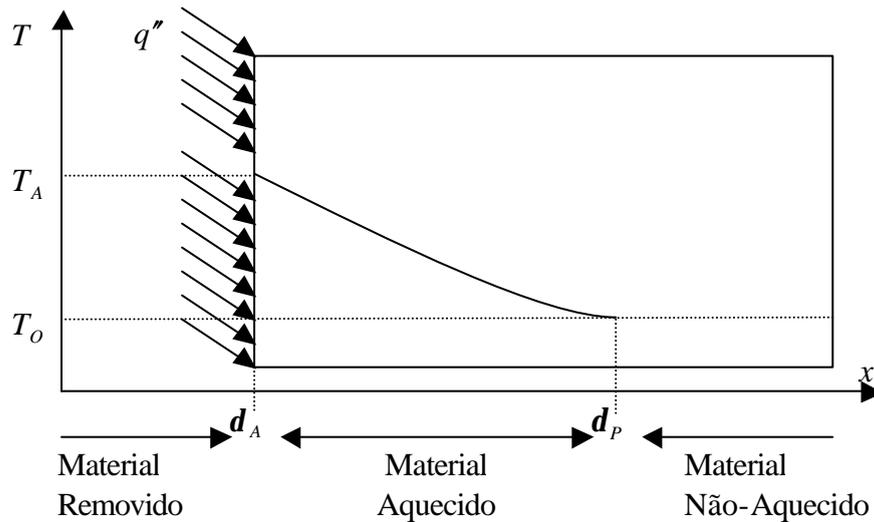


Figura 4 – Modelo físico adotado.

3.2 Modelos Matemáticos

Os modelos matemáticos baseados no modelo físico descrito anteriormente se constituem em soluções aproximadas de problemas unidimensionais de condução de calor em um material ablativo puro.

Nesse trabalho, será utilizada a formulação de temperaturas (ver seção 2.3.3) por conveniência uma vez que, no modelo físico adotado, a fase não-sólida, ou posterior a ablação, é considerada removida instantaneamente, sem que seja adotada nenhuma hipótese com respeito a sua temperatura.

A equação transiente de condução de calor unidimensional é adotada para o material sólido, considerando constantes a densidade ρ e a capacidade calorífica a pressão constante c_p do material, resultando em:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (8)$$

onde k é a condutividade térmica do material, T é a temperatura do material, função da coordenada espacial na direção em que ocorre o fenômeno da ablação, x e da variável temporal, t , ou seja $T(x, t)$.

As seguintes condições de contorno se aplicam: para o período pré-ablativo ($t \leq t_A$), onde t_A é o tempo no qual a temperatura da superfície atinge T_A , tem-se:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \text{ em } x = \mathbf{d}_p, \quad (9)$$

$$T = T_O, \text{ em } x = \mathbf{d}_p, \quad (10)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q'', \text{ em } x = \mathbf{d}_A, \quad (11)$$

onde q'' é o fluxo de calor incidente na face do material que vai sofrer a ablação. Nesse período \mathbf{d}_A é constante. Para o período ablativo ($t \geq t_A$), as seguintes condições de contorno são válidas:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \text{ em } x = \mathbf{d}_p, \quad (12)$$

$$T = T_O, \text{ em } x = \mathbf{d}_p, \quad (13)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q'' - \mathbf{r} \mathbf{l} \frac{d \mathbf{d}_A}{d t}, \text{ em } x = \mathbf{d}_A, \quad (14)$$

$$T = T_A, \text{ em } x = \mathbf{d}_A, \quad (15)$$

onde \mathbf{l} é o calor latente de ablação efetivo, que leva em consideração todos os fenômenos envolvidos no processo, e $\frac{d \mathbf{d}_A}{d t}$ é a taxa de ablação instantânea, ou a velocidade na qual o material é consumido.

Integrando-se a Eq. (8) em x entre \mathbf{d}_A e \mathbf{d}_p , obtém-se a equação abaixo:

$$\int_{\mathbf{d}_A}^{\mathbf{d}_p} \left[\mathbf{r} c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] d x = \int_{\mathbf{d}_A}^{\mathbf{d}_p} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] d x. \quad (16)$$

Como os limites de integração variam com o tempo, pode-se utilizar a regra de Leibnitz para obter a seguinte expressão:

$$r c_p \frac{d}{dt} \int_{d_A}^{d_P} T dx - r c_p T|_{x=d_P} \frac{d d_P}{dt} + r c_p T|_{x=d_A} \frac{d d_A}{dt} = k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d_P} - k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d_A} . \quad (17)$$

A Eq. (17) será a base utilizada para os dois modelos que serão apresentados a seguir.

3.2.1 Método Integral

O método integral, conforme descrito por Goodman (1969) é ideal para problemas não lineares, tais como a transferência de calor com mudança de fase, uma vez que se absorvem facilmente as não linearidades do problema sem exigir a linearização do mesmo.

Conforme bem estabelecido na literatura, no método integral propõe-se uma função resposta para a variável do problema que dependa de parâmetros a serem ajustados, a partir das condições de contorno do problema.

Aqui optar-se-á por uma função resposta para a temperatura T na forma de uma função de grau n na coordenada espacial x , sendo os parâmetros a serem ajustados, A e B dependentes da coordenada temporal t , conforme a equação abaixo:

$$T = A \left(\frac{d_P - x}{d_P - d_A} \right)^n + B . \quad (18)$$

A derivada da expressão anterior é:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -A n \frac{(d_P - x)^{n-1}}{(d_P - d_A)^n} . \quad (19)$$

As soluções obtidas utilizando o método integral serão apresentadas para os períodos pré-ablativo e ablativo, respectivamente.

3.2.1.1 Período Pré-Ablativo

Como já observado, as condições de contorno válidas para o período pré-ablativo são as apresentadas pelas Eqs. (9), (10) e (11).

Assim, substituindo a Eq. (19) na Eq. (9) obtêm-se a seguinte igualdade:

$$-k A n \frac{(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_P)^{n-1}}{(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)^n} = 0, \quad (20)$$

cuja simplificação indica uma condição de contorno naturalmente obedecida pela função escolhida.

Substituindo agora a Eq. (18) na Eq. (10), observa-se que:

$$A \left(\frac{\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_P}{\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A} \right)^n + B = T_O, \quad (21)$$

portanto,

$$B = T_O. \quad (22)$$

Substituindo a Eq. (19) na Eq. (11), obtém-se:

$$k A n \frac{(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)^{n-1}}{(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)^n} = q''. \quad (23)$$

Isolando-se a variável A , observa-se que:

$$A = \frac{q'' (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)}{k n}. \quad (24)$$

Por fim, a substituição das Eqs. (22) e (24) na Eq. (18) resulta em:

$$T = \frac{q''(\mathbf{d}_p - \mathbf{d}_A)}{kn} \left(\frac{\mathbf{d}_p - x}{\mathbf{d}_p - \mathbf{d}_A} \right)^n + T_o, \text{ em } \mathbf{d}_A \leq x \leq \mathbf{d}_p. \quad (25)$$

Esta equação, que determina o perfil de temperatura, permite o cálculo de \mathbf{d}_p a partir da Eq. (17). Substituindo as Eqs. (9), (11) e (25) nesta expressão, obtém-se:

$$\begin{aligned} r c_p \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{d}_A}^{\mathbf{d}_p} \left(\frac{q''(\mathbf{d}_p - \mathbf{d}_A)}{kn} \left(\frac{\mathbf{d}_p - x}{\mathbf{d}_p - \mathbf{d}_A} \right)^n \right) d x + r c_p T_o \frac{d \mathbf{d}_p}{dt} - r c_p T_o \frac{d \mathbf{d}_A}{dt} - \\ r c_p T_o \frac{d \mathbf{d}_p}{dt} + r c_p \frac{q''(\mathbf{d}_p - \mathbf{d}_A)}{kn} \frac{d \mathbf{d}_A}{dt} + r c_p T_o \frac{d \mathbf{d}_A}{dt} = 0 + q' \end{aligned} \quad (26)$$

Resolvendo a integral espacial e considerando \mathbf{d}_A constante, após alguma simplificação, a seguinte expressão pode ser obtida:

$$r c_p \frac{d}{dt} \left(\frac{q''(\mathbf{d}_p - \mathbf{d}_A)^2}{kn(n+1)} \right) = q''. \quad (27)$$

Definindo-se $u \equiv (\mathbf{d}_p - \mathbf{d}_A)^2$ e rearranjando-se os termos tem-se:

$$\frac{d}{dt} (q'' u) = q'' \frac{kn(n+1)}{r c_p}, \quad (28)$$

que pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} (u) + u \frac{d}{dt} [\ln (q'')] = \frac{kn(n+1)}{r c_p q''}. \quad (29)$$

A solução desta equação diferencial, de acordo com Spiegel (1973) é:

$$u = u_o + \left(\frac{kn(n+1)}{r c_p q''} \right) \int_{t_o}^t (q'') dt, \quad (30)$$

onde t_o é o tempo no qual iniciou-se o processo de pré-ablação e u_o é o quadrado da distância entre \mathbf{d}_A e \mathbf{d}_P no instante de início do processo. Usualmente t_o e u_o são iguais a zero. Assim, a substituição de u na equação anterior, resulta em:

$$\mathbf{d}_P = \mathbf{d}_A + \sqrt{(\mathbf{d}_{PO} - \mathbf{d}_A)^2 + \left(\frac{kn(n+1)}{rc_P q''} \right) \int_{t_o}^t (q'') dt} . \quad (31)$$

Substituindo esta expressão na Eq. (25), T fica na forma:

$$T = \frac{q'' \left(\mathbf{d}_A + \sqrt{(\mathbf{d}_{PO} - \mathbf{d}_A)^2 + \left(\frac{kn(n+1)}{rc_P q''} \right) \int_{t_o}^t (q'') dt} - x \right)^n}{kn \left(\sqrt{(\mathbf{d}_{PO} - \mathbf{d}_A)^2 + \left(\frac{kn(n+1)}{rc_P q''} \right) \int_{t_o}^t (q'') dt} \right)^{n-1}} + T_o, \text{ em } \mathbf{d}_A \leq x \leq \mathbf{d}_P . \quad (32)$$

Considerando o caso em que u_o é igual a zero, e portanto $(\mathbf{d}_{PO} - \mathbf{d}_A)^2$ é igual a zero, e \mathbf{d}_A também zero observa-se que:

$$\mathbf{d}_P = \sqrt{\left(\frac{kn(n+1)}{rc_P q''} \right) \int_{t_o}^t (q'') dt} . \quad (33)$$

Substituindo a Eq. (33) na Eq. (25), obtém-se uma outra expressão para a distribuição de temperatura, a saber:

$$T = \frac{q'' \left(\sqrt{\left(\frac{kn(n+1)}{rc_P q''} \right) \int_{t_o}^t (q'') dt} - x \right)^n}{kn \left(\sqrt{\left(\frac{kn(n+1)}{rc_P q''} \right) \int_{t_o}^t (q'') dt} \right)^{n-1}} + T_o, \text{ em } 0 \leq x \leq \mathbf{d}_P . \quad (34)$$

Como a temperatura na superfície ($x = 0$) é T_A , para o tempo t_A , então:

$$T_A = \frac{q'' \left(\sqrt{\left(\frac{kn(n+1)}{rc_p q''} \right) \int_{t_0}^{t_A} (q'') dt} \right)}{kn} + T_0. \quad (35)$$

Considerando q'' constante obtém-se

$$T_A = \frac{q'' \left(\sqrt{\left(\frac{kn(n+1)(t_A - t_0)}{rc_p} \right)} \right)}{kn} + T_0. \quad (36)$$

Assim, t_A pode ser isolado na equação anterior, ou seja:

$$t_A = \frac{n}{(n+1)} k rc_p \left(\frac{(T_A - T_0)}{q''} \right)^2 + t_0. \quad (37)$$

Essa expressão determina o instante de início do período ablativo.

3.2.1.2 Período Ablativo

Como já observado, as Eqs. (12), (13), (14) e (15) apresentam as condições de contorno válidas para o período ablativo.

Assim, substituindo a Eq. (19) na Eq. (12) obtém-se

$$-k An \frac{(d_p - d_p)^{n-1}}{(d_p - d_A)^n} = 0, \quad (38)$$

cuja simplificação indica uma condição de contorno naturalmente obedecida pela função escolhida.

Agora, substituindo a Eq. (18) na Eq. (13), se obtém a seguinte expressão:

$$A \left(\frac{\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_P}{\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A} \right)^n + B = T_O, \quad (39)$$

ou seja:

$$B = T_O. \quad (40)$$

Substituindo a Eq. (18) na Eq. (15), a seguinte expressão é obtida:

$$A \left(\frac{\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A}{\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A} \right)^n + B = T_A. \quad (41)$$

Inserindo a Eq. (40) na Eq. (41) e isolando-se a variável A , tem-se:

$$A = T_A - T_O. \quad (42)$$

Por fim, substituindo as Eqs. (40) e (42) na Eq. (18), a seguinte expressão para a distribuição de temperatura pode ser observada:

$$T = (T_A - T_O) \left(\frac{\mathbf{d}_P - x}{\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A} \right)^n + T_O, \text{ em } \mathbf{d}_A \leq x \leq \mathbf{d}_P. \quad (43)$$

Esta equação será utilizada para calcular \mathbf{d}_P e \mathbf{d}_A , como se verá a seguir. Substituindo as Eqs. (12), (19) e (43) na Eq. (17) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \mathbf{r} c_P \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{d}_A}^{\mathbf{d}_P} \left((T_A - T_O) \left(\frac{\mathbf{d}_P - x}{\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A} \right)^n + T_O \right) dx - \mathbf{r} c_P T_O \frac{d \mathbf{d}_P}{dt} + \mathbf{r} c_P T_A \frac{d \mathbf{d}_A}{dt} \\ & = 0 + k n \frac{(T_A - T_O)}{(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)} \end{aligned} \quad (44)$$

Resolvendo a integral espacial e simplificando:

$$r c_p \frac{d}{dt} \left(\frac{(T_A - T_O)(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)}{(n+1)} \right) + r c_p (T_A - T_O) \frac{d \mathbf{d}_A}{dt} = k n \frac{(T_A - T_O)}{(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)}. \quad (45)$$

Com algum algebrismo, esta expressão resulta em:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A) + (n+1) \frac{d \mathbf{d}_A}{dt} = \frac{k n (n+1)}{r c_p (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)}. \quad (46)$$

Isolando-se $(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)$, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A) = \frac{k n (n+1)}{r c_p (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)} - (n+1) \frac{d \mathbf{d}_A}{dt}. \quad (47)$$

Agora, substituindo a Eq. (43) na Eq. (14) obtém-se:

$$\frac{k n (T_A - T_O)}{(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)} = q'' - r l \frac{d \mathbf{d}_A}{dt}. \quad (48)$$

De onde isolando-se \mathbf{d}_A , a seguinte equação é observada:

$$\frac{d \mathbf{d}_A}{dt} = \frac{q''}{r l} - \frac{k n (T_A - T_O)}{r l (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)}. \quad (49)$$

Porém, substituindo a Eq. (47) na Eq. (49), obtém-se a equação:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A) = \frac{k n (n+1)}{r c_p (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)} - (n+1) \left[\frac{q''}{r l} - \frac{k n (T_A - T_O)}{r l (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)} \right], \quad (50)$$

que, rearranjando-se os termos no lado direito da equação, toma a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A) = \frac{kn(n+1)(T_A - T_O)}{r \mathbf{l}(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)} \left[\frac{\mathbf{l}}{c_P(T_A - T_O)} + 1 \right] - \frac{(n+1)q''}{r \mathbf{l}}. \quad (51)$$

Definindo-se a variável $\mathbf{t} \equiv \int_{t_A}^t \frac{(n+1)q''(t)}{r \mathbf{l}} dt$ e fazendo a mudança de variável de diferenciação, onde agora, assume-se \mathbf{d}_P e \mathbf{d}_A dependentes de \mathbf{t} , a equação anterior toma a forma:

$$\frac{d}{d\mathbf{t}}(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A) = \frac{kn(T_A - T_O)}{q''(\mathbf{t})(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)} \left(\frac{\mathbf{l}}{c_P(T_A - T_O)} + 1 \right) - 1. \quad (52)$$

Definindo-se o termo penetração relativa como $u \equiv \mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A$, o número inverso de Stefan como $\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{l}}{c_P(T_A - T_O)}$, a função auxiliar $F \equiv \frac{kn(T_A - T_O)(\mathbf{n} + 1)}{q''}$ e substituindo essas definições na Eq. (52), esta toma a forma:

$$\frac{du}{d\mathbf{t}} = \frac{F}{u} - 1. \quad (53)$$

A Eq. (53) é conhecida como Eq. de Abel de segundo tipo, cuja solução é:

$$u = F \left(LambertW \left\{ \left(\frac{u_A}{F} - 1 \right) \exp \left[\frac{u_A}{F} - 1 - \frac{\mathbf{t}}{F} \right] \right\} + 1 \right), \quad (54)$$

onde u_A é a diferença entre \mathbf{d}_A e \mathbf{d}_P no instante t_A , obtida através da simplificação da Eq. (25) para $x = \mathbf{d}_A$ e $T = T_A$ cuja forma funcional pode ser observada na expressão a seguir:

$$u_A = \frac{kn(T_A - T_O)}{q''_A}, \quad (55)$$

onde q_A'' é o valor de q'' no instante t_A . A função LambertW, conforme Corless *et al.* (1996), é a função resposta analítica para a equação $y e^y = x$ que passa pela origem. Mais informações sobre a função LambertW podem ser encontradas no Anexo 1 a este trabalho.

A partir da Eq. (55) e da definição de F , pode-se afirmar que:

$$\frac{u_A}{F} = \frac{q''}{q_A''(\mathbf{n}+1)}. \quad (56)$$

Substituindo a Eq. (56) e as devidas definições na Eq. (54) obtêm-se:

$$u = \frac{kn(T_A - T_O)}{q''}(\mathbf{n}+1) \cdot \left(LambertW \left\{ \left[\frac{q'' - q_A''}{q_A''(\mathbf{n}+1)} - \frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}+1)} \right] \exp \left[\frac{q'' - q_A''}{q_A''(\mathbf{n}+1)} - \frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}+1)} - \frac{(n+1)q''}{r \mathbf{I} kn(T_A - T_O)(\mathbf{n}+1)} \int_{t_A}^t q'' dt \right] \right\} + 1 \right). \quad (57)$$

Considerando-se q'' constante, observa-se que:

$$u = \frac{kn(T_A - T_O)}{q''}(\mathbf{n}+1) \cdot \left(LambertW \left\{ \left[-\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}+1} \right] \exp \left[-\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}+1} - \frac{(n+1)q''^2(t-t_A)}{r \mathbf{I} kn(T_A - T_O)(\mathbf{n}+1)} \right] \right\} + 1 \right). \quad (58)$$

Agora, fazendo-se a substituição de variáveis na Eq. (49), esta toma a forma:

$$\frac{d\mathbf{d}_A}{d\mathbf{t}} \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{(n+1)q''}{(n+1)r\mathbf{I}} - \frac{kn(T_A - T_O)}{r\mathbf{I}(\mathbf{d}_p - \mathbf{d}_A)}. \quad (59)$$

Com alguma manipulação algébrica, pode-se chegar na seguinte expressão:

$$\frac{d\mathbf{d}_A}{d\mathbf{t}} = \frac{1}{(n+1)} - \frac{kn(T_A - T_O)}{(n+1)q''u}. \quad (60)$$

Integrando ambos os lados por t entre 0 e t , obtém-se a expressão:

$$d_A - d_{AO} = \frac{t}{(n+1)} + \frac{kn(T_A - T_O)}{(n+1)q''} \int_0^t -\frac{1}{u} dt. \quad (61)$$

Inserindo-se a Eq. (57) e resolvendo a integral obtém-se:

$$d_A - d_{AO} = \frac{t}{(n+1)} + \frac{kn(T_A - T_O)}{(n+1)q''} \ln \left(LambertW \left\{ \left(\frac{u_A}{F} - 1 \right) \exp \left[\frac{u_A}{F} - 1 - \frac{t}{F} \right] \right\} \right) \Bigg|_0^t. \quad (62)$$

A equação anterior, após algum algebrismo, tem a forma:

$$d_A - d_{AO} = \frac{t}{(n+1)} + \frac{kn(T_A - T_O)}{(n+1)q''} \left[\frac{u_A}{F} - 1 - \frac{t}{F} - LambertW \left\{ \left(\frac{u_A}{F} - 1 \right) \exp \left[\frac{u_A}{F} - 1 - \frac{t}{F} \right] \right\} \right]. \quad (63)$$

Utilizando-se os parâmetros já definidos anteriormente, pode-se reescrever esta equação de forma compacta, resultando em:

$$d_A - d_{AO} = \frac{nt}{(n+1)(n+1)} + \frac{u_A}{(n+1)(n+1)} - \frac{u}{(n+1)(n+1)}. \quad (64)$$

Esta expressão pode ainda ser escrita da seguinte forma completa:

$$d_A = d_{AO} + \frac{n}{rI(n+1)} \int_{t_A}^t q'' dt + \frac{kn(T_A - T_O)}{q_A''(n+1)(n+1)} - \frac{kn(T_A - T_O)}{q''(n+1)} \left(LambertW \left\{ \left(\frac{q'' - q_A''}{q_A''(n+1)} - \frac{n}{(n+1)} \right) \exp \left[\frac{q'' - q_A''}{q_A''(n+1)} - \frac{n}{(n+1)} - \frac{q''(n+1)}{rIkn(T_A - T_O)(n+1)} \int_{t_A}^t q'' dt \right] \right\} + 1 \right). \quad (65)$$

Para o caso de q'' constante, esta equação toma a forma:

$$\mathbf{d}_A = \mathbf{d}_{Ao} + \frac{\mathbf{n} q''(t-t_A)}{\mathbf{r} \mathbf{I} (\mathbf{n}+1)} - \frac{k n (T_A - T_o)}{q'' (\mathbf{n}+1)} \cdot \left(LambertW \left\{ \left(-\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}+1} \right) \exp \left[-\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}+1} - \frac{(n+1) q''^2 (t-t_A)}{\mathbf{r} \mathbf{I} k n (T_A - T_o) (\mathbf{n}+1)} \right] \right\} + 1 - \frac{1}{\mathbf{n}+1} \right) \quad (66)$$

Da definição de u temos:

$$\mathbf{d}_p = u + \mathbf{d}_A \quad (67)$$

Substituindo nesta equação a expressão compacta de \mathbf{d}_A dada pela Eq. (64), tem-se:

$$\mathbf{d}_p = \frac{\mathbf{n} t}{(\mathbf{n}+1)(\mathbf{n}+1)} + \frac{u_A}{(\mathbf{n}+1)(\mathbf{n}+1)} + \frac{((\mathbf{n}+1)(\mathbf{n}+1)-1)u}{(\mathbf{n}+1)(\mathbf{n}+1)} + \mathbf{d}_{Ao}, \quad (68)$$

ou ainda, na forma completa,

$$\mathbf{d}_p = \mathbf{d}_{Ao} + \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{r} \mathbf{I} (\mathbf{n}+1)} \int_{t_A}^t q'' dt + \frac{k n (T_A - T_o)}{q_A'' (\mathbf{n}+1) (\mathbf{n}+1)} + \frac{((\mathbf{n}+1)(\mathbf{n}+1)-1) k n (T_A - T_o)}{(n+1) q''} \left(LambertW \left\{ \left(\frac{q''}{q_A'' (\mathbf{n}+1)} - 1 \right) \exp \left[\frac{q''}{q_A'' (\mathbf{n}+1)} - 1 - \frac{q'' \int_{t_A}^t (n+1) q'' dt}{\mathbf{r} \mathbf{I} k n (T_A - T_o) (\mathbf{n}+1)} \right] \right\} + 1 \right) \quad (69)$$

Para o caso de q'' constante, tem-se:

$$\mathbf{d}_p = \mathbf{d}_{Ao} + \frac{\mathbf{n} q''(t-t_A)}{\mathbf{r} \mathbf{I} (\mathbf{n}+1)} + \frac{k n (T_A - T_o)}{q'' (\mathbf{n}+1)} \left((\mathbf{n}+1)(\mathbf{n}+1)-1 \right) \left(LambertW \left\{ \left(-\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}+1} \right) \exp \left[-\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}+1} - \frac{(n+1) q''^2 (t-t_A)}{\mathbf{r} \mathbf{I} k n (T_A - T_o) (\mathbf{n}+1)} \right] \right\} + 1 \right) + \frac{1}{(\mathbf{n}+1)} \quad (70)$$

Esta expressão determina a posição da frente de penetração de calor para o período ablativo, e é muito útil para o projeto de sistemas de proteção térmica de veículos de reentrada.

3.2.2 Método Analogia Elétrica

O método de analogia elétrica, conforme exposto anteriormente na seção 2.4, é baseado na semelhança entre os equacionamentos adotados para os circuitos elétricos analógicos e para a transferência de calor. Este é um método conveniente de se usar com o objetivo de se obter soluções de engenharia que possam ser utilizadas como ferramentas simplificadas, a serem empregadas em projetos térmicos em geral.

Assim, partindo da Eq. (17), repetida abaixo por conveniência,

$$r c_p \frac{d}{dt} \int_{d_A}^{d_p} T dx - r c_p T|_{x=d_p} \frac{d d_p}{dt} + r c_p T|_{x=d_A} \frac{d d_A}{dt} = k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d_p} - k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d_A}, \quad (17)$$

pode-se definir $\bar{T} = \frac{\int_{d_A}^{d_p} T dx}{(d_p - d_A)}$. Portanto, $\int_{d_A}^{d_p} T dx = (d_p - d_A) \bar{T}$. Substituindo na Eq. (17)

e simplificando,

$$r c_p (d_p - d_A) \frac{d \bar{T}}{dt} + r c_p (\bar{T} - T|_{x=d_p}) \frac{d d_p}{dt} - r c_p (\bar{T} - T|_{x=d_A}) \frac{d d_A}{dt} = k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d_p} - k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d_A}. \quad (71)$$

Utiliza-se da técnica de diferenças finitas para discretizar as derivadas espaciais, resultando em:

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d_p} = k \frac{T|_{x=d_p} - \bar{T}}{(1-f)(d_p - d_A)} \text{ e } k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d_A} = k \frac{\bar{T} - T|_{x=d_A}}{f(d_p - d_A)},$$

onde f é um valor constante entre 0 e 1 que representa a posição de \bar{T} , conforme pode ser observado na Fig. (5).

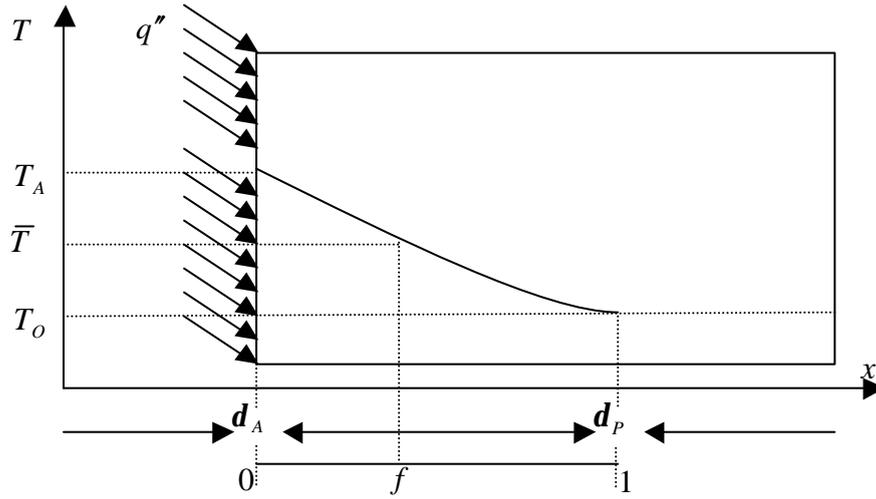


Figura 5 - Modelo físico adotado com as variáveis do modelo de analogia elétrica.

Aplicando a discretização obtém-se:

$$r_{c_p} (d_p - d_A) \frac{d\bar{T}}{dt} + r_{c_p} (\bar{T} - T|_{x=d_p}) \frac{d d_p}{dt} - r_{c_p} (\bar{T} - T|_{x=d_A}) \frac{d d_A}{dt} = k \frac{T|_{x=d_p} - \bar{T}}{(1-f)(d_p - d_A)} - k \frac{\bar{T} - T|_{x=d_A}}{f(d_p - d_A)}. \quad (72)$$

Rearranja-se a expressão para agrupar os termos semelhantes e obtém-se a equação:

$$r_{c_p} (d_p - d_A) \frac{d\bar{T}}{dt} = \left[\frac{k}{(1-f)(d_p - d_A)} + r_{c_p} \frac{d d_p}{dt} \right] (T|_{x=d_p} - \bar{T}) - \left[\frac{k}{f(d_p - d_A)} - r_{c_p} \frac{d d_A}{dt} \right] (\bar{T} - T|_{x=d_A}). \quad (73)$$

Os termos da Eq. (73) podem ser associados com os seguintes componentes elétricos,

Tabela 1 – Associação de Termos da Eq. (73) com Componentes Elétricos.

Termo	Componente Elétrico (Simbologia)
\bar{T}	Potencial Elétrico (\bar{T})
$r c_p (\mathbf{d}_p - \mathbf{d}_A)$	Capacitância Elétrica Global (C)
$r c_p \frac{d \mathbf{d}_p}{d t}$	Fonte Potencial (F_p)
$\frac{k}{(1-f)(\mathbf{d}_p - \mathbf{d}_A)}$	Condutância Elétrica ($\frac{1}{R_p}$)
$r c_p \frac{d \mathbf{d}_A}{d t}$	Fonte Potencial (F_A)
$\frac{k}{f(\mathbf{d}_p - \mathbf{d}_A)}$	Condutância Elétrica ($\frac{1}{R_A}$)
$T _{x=\mathbf{d}_p}$	Potencial Elétrico na posição \mathbf{d}_p (T_1)
$T _{x=\mathbf{d}_A}$	Potencial Elétrico na posição \mathbf{d}_A (T_2)

Substituindo os termos da Eq. (73) pela simbologia apresentada obtém-se:

$$C \frac{d\bar{T}}{d t} = \left[\frac{1}{R_p} + F_p \right] (T_1 - \bar{T}) - \left[\frac{1}{R_A} - F_A \right] (\bar{T} - T_2). \quad (74)$$

A Eq. (74) representa o circuito elétrico demonstrado na Fig. (6) e que será utilizado para a solução da ablação nos períodos pré-ablativo e ablativo, bastando para isso incluir as equações de contorno.

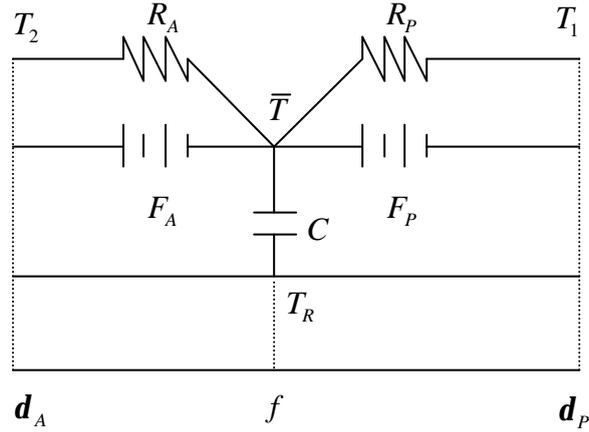


Figura 6 – Circuito elétrico representado pela Eq. (74).

Arbitrando a seguinte função de grau n para o perfil de temperaturas:

$$T = (T_2 - T_1) \left(\frac{d_p - x}{d_p - d_A} \right)^n + T_1, \text{ em } d_A \leq x \leq d_p, \quad (75)$$

pode-se calcular o valor de f , a partir da definição de \bar{T} onde:

$$\bar{T} = \frac{\int_{d_A}^{d_p} \left((T_2 - T_1) \left(\frac{d_p - x}{d_p - d_A} \right)^n + T_1 \right) dx}{(d_p - d_A)} = \frac{(T_2 - T_1)}{n+1} + T_1. \quad (76)$$

Como f é a posição da temperatura média, utilizando a expressão anterior, obtém-se:

$$\bar{T} = (T_2 - T_1) \left(\frac{d_p - f(d_p - d_A) - d_A}{d_p - d_A} \right)^n + T_1. \quad (77)$$

Igualando-se as Eqs. (76) e (77), obtém-se uma equação para f , que tem como solução:

$$f = 1 - \left(\frac{1}{n+1} \right)^{1/n}. \quad (78)$$

A partir destas expressões pode-se determinar a distribuição de temperatura através da solução do o circuito básico, para os períodos pré-ablativo e ablativo.

3.2.2.1 Período Pré-Ablativo

No período pré-ablativo, são consideradas as condições de contorno apresentadas pelas Eqs. (9), (10) e (11), reproduzidas abaixo por conveniência:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \text{ em } x = \mathbf{d}_p, \quad (9)$$

$$T = T_o, \text{ em } x = \mathbf{d}_p, \quad (10)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q'', \text{ em } x = \mathbf{d}_A, \quad (11)$$

e a condição de pré-ablação, i.e., $\frac{d\mathbf{d}_A}{dt} = 0$.

Aplicando a discretização de diferenças finitas, apresentada anteriormente, nas derivadas espaciais e substituindo os termos de condução de calor pela analogia elétrica, obtemos as seguintes condições de contorno:

$$-\frac{T_1 - \bar{T}}{R_p} = 0, \quad (79)$$

$$T_1 = T_o, \quad (80)$$

$$-\frac{\bar{T} - T_2}{R_A} = q'', \quad (81)$$

e, para a pré-ablação, $F_A = 0$.

Para que a Eq. (79) seja verdadeira para o caso de $T_1 \neq \bar{T}$ teremos que $R_p = \infty$, ou, em termos de circuitos elétricos, circuito aberto.

Inserindo essas condições de contorno no circuito elétrico apresentado na Fig. (6) obtemos a Fig. (7), onde q'' representa uma fonte de corrente elétrica.

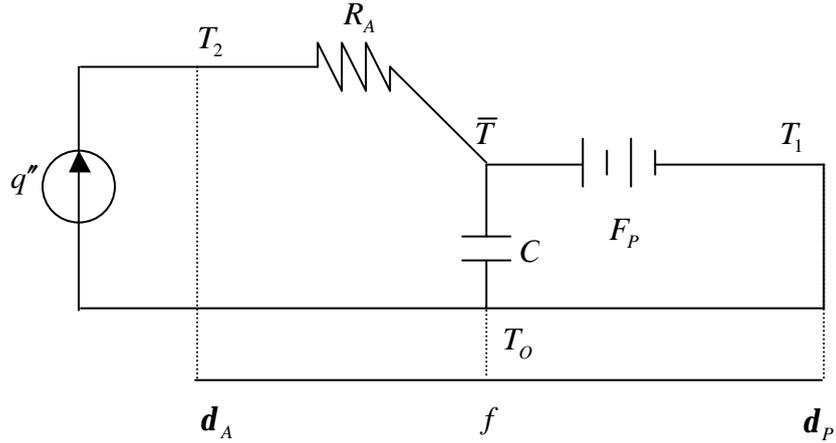


Figura 7 – Circuito elétrico representado pela Eq. (74) com as equações de contorno do período pré-ablativo.

Analisando o circuito da Fig. (7) pela lei dos nós de Kirchoff, que indica que a soma das correntes que entram e saem de um nó é igual a zero, monta-se o seguinte sistema de equações:

$$\text{Nó \#1: } -\frac{\bar{T} - T_2}{R_A} + q'' = 0, \quad (82)$$

$$\text{Nó \#2: } C \frac{d\bar{T}}{dt} = [F_P](T_1 - \bar{T}) - \left[\frac{1}{R_A} \right] (\bar{T} - T_2). \quad (83)$$

Utiliza-se o nó #1 para calcular a variável T_2 e o nó #2 para d_P . Substituindo os componentes elétricos por seus equivalentes de acordo com a Tabela 2, obtêm-se as seguintes equações:

$$\text{Nó \#1: } -\frac{k(\bar{T} - T_2)}{f(d_P - d_A)} = q'', \quad (84)$$

$$\text{Nó \#2: } r_{c_P}(d_P - d_A) \frac{d\bar{T}}{dt} = r_{c_P} \frac{d d_P}{dt} (T_0 - \bar{T}) + q''. \quad (85)$$

Isolando-se T_2 a partir da Eq. (84):

$$T_2 = \frac{q'' f(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)}{k} + \bar{T}. \quad (86)$$

Inserindo-se a Eq. (76) na expressão acima e com algum algebrismo obtém-se:

$$T_2 = \frac{q'' f(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)(n+1)}{kn} + T_O. \quad (87)$$

Fazendo o mesmo com a Eq. (85) a expressão fica na forma:

$$\mathbf{r} c_P (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A) \frac{d}{dt} \left(\frac{T_2 - T_O}{n+1} + T_O \right) = \mathbf{r} c_P \frac{d \mathbf{d}_P}{dt} \left(T_O - \frac{T_2 - T_O}{n+1} - T_O \right) + q'', \quad (88)$$

onde, com alguma manipulação algébrica é obtido:

$$\frac{\mathbf{r} c_P (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)}{n+1} \frac{d}{dt} (T_2 + n T_O) = \frac{\mathbf{r} c_P}{n+1} \frac{d \mathbf{d}_P}{dt} (-T_2 + T_O) + q''. \quad (89)$$

Inserindo-se a Eq. (87) na expressão acima, obtém-se:

$$\frac{\mathbf{r} c_P}{kn} f(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A) \frac{d}{dt} (q'' (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)) = q'' - q'' f(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A) \frac{\mathbf{r} c_P}{kn} \frac{d \mathbf{d}_P}{dt}. \quad (90)$$

Para solucionar a Eq. (90) substitui-se $\frac{d \mathbf{d}_P}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)$, pois $\frac{d \mathbf{d}_A}{dt} = 0$ e

isola-se $\frac{d}{dt} (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)$, obtendo depois de alguns passos algébricos:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)^2 + (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)^2 \frac{d}{dt} (\ln(q'')) = \frac{kn}{f \mathbf{r} c_P}, \quad (91)$$

que tem como solução, de acordo com Spiegel (1973):

$$\mathbf{d}_P = \mathbf{d}_A + \sqrt{(\mathbf{d}_{PO} - \mathbf{d}_A)^2 + \left(\frac{kn}{f \mathbf{r} c_P q''} \right) \int_{t_0}^t (q'') dt} . \quad (92)$$

Inserindo esse resultado na Eq. (87) obtém-se:

$$T_2 = \frac{q'' f \sqrt{(\mathbf{d}_{PO} - \mathbf{d}_A)^2 + \left(\frac{kn}{f \mathbf{r} c_P q''} \right) \int_{t_0}^t (q'') dt} (n+1)}{kn} + T_O . \quad (93)$$

Para o caso de fluxo constante e $\mathbf{d}_{PO} = \mathbf{d}_A$, obtém-se a partir das Eqs. (92) e (93), respectivamente:

$$\mathbf{d}_P = \mathbf{d}_A + \sqrt{\left(\frac{kn(t-t_0)}{f \mathbf{r} c_P} \right)} , \quad (94)$$

$$T_2 = q'' \sqrt{\frac{f(t-t_0)}{kn \mathbf{r} c_P}} (n+1) + T_O , \quad (95)$$

com f dado pela Eq. (78). Para o instante t_A , em que começa a ocorrer a ablação, tem-se $T_2 = T_A$. A partir da Eq. (95) chega-se a:

$$t_A = \frac{n}{f(n+1)^2} k \mathbf{r} c_P \left(\frac{T_A - T_O}{q''} \right)^2 + t_0 . \quad (96)$$

A partir do instante t_A o período ablativo passa a ser considerado.

3.2.2.2 Período Ablativo

No período ablativo são consideradas as condições de contorno apresentadas pelas Eq. (12), (13), (14) e (15), reproduzidas abaixo por conveniência.

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \text{ em } x = \mathbf{d}_p, \quad (12)$$

$$T = T_o, \text{ em } x = \mathbf{d}_p, \quad (13)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q'' - r l \frac{d \mathbf{d}_A}{d t}, \text{ em } x = \mathbf{d}_A, \quad (14)$$

$$T = T_A, \text{ em } x = \mathbf{d}_A. \quad (15)$$

Aplicando a discretização nas derivadas espaciais e substituindo os termos de condução de calor pela analogia elétrica, obtemos as seguintes condições de contorno:

$$-\frac{T_1 - \bar{T}}{R_p} = 0, \quad (97)$$

$$T_1 = T_o, \quad (98)$$

$$-\frac{\bar{T} - T_2}{R_A} = q'' - L, \quad (99)$$

$$T_2 = T_A. \quad (100)$$

Para que a Eq. (97) seja satisfeita para o caso de $T_1 \neq \bar{T}$ deve-se fazer $R_p = \infty$, ou, em termos de circuitos elétricos, circuito aberto.

Inserindo essas condições de contorno no circuito elétrico apresentado na Fig. (6) obtemos a Fig. (8),

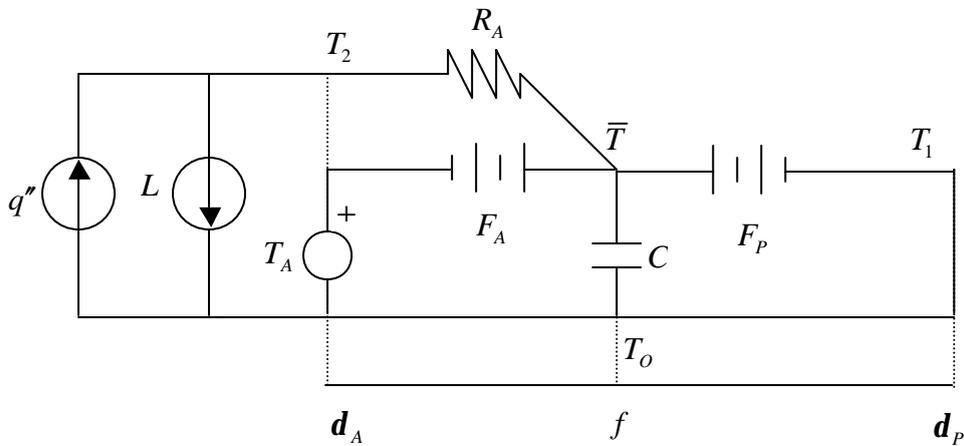


Figura 8 – Circuito elétrico representado pela Eq. (74) com as equações de contorno do período ablativo.

onde q'' e L são fontes de corrente elétrica e T_A é uma fonte de tensão.

Analisando o circuito da Fig. (8) pela lei dos nós de Kirchoff, que indica que a soma das correntes que entram e saem de um nó é igual a zero, monta-se o seguinte sistema de equações para os nós 1 e 2:

$$\text{Nó \#1: } -\frac{\bar{T} - T_2}{R_A} = q'' - L, \quad (101)$$

$$\text{Nó \#2: } C \frac{d\bar{T}}{dt} = [F_P](T_1 - \bar{T}) - \left[\frac{1}{R_A} - F_A \right] (\bar{T} - T_2). \quad (102)$$

Utiliza-se o Nó #1 para calcular a variável \mathbf{d}_A e o Nó #2 para \mathbf{d}_P . Substituindo os componentes elétricos por seus equivalentes de acordo com a Tabela 2 e inserindo-se a Eq. (100), obtêm-se as seguintes equações:

$$\text{Nó \#1: } -\frac{k(\bar{T} - T_A)}{f(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)} = q'' - \mathbf{r} \mathbf{l} \frac{d\mathbf{d}_A}{dt}, \quad (103)$$

$$\text{Nó \#2: } \mathbf{r} c_P (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A) \frac{d\bar{T}}{dt} = \left[\mathbf{r} c_P \frac{d\mathbf{d}_P}{dt} \right] (T_O - \bar{T}) - \left[\frac{k}{f(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)} - \mathbf{r} c_P \frac{d\mathbf{d}_A}{dt} \right] (\bar{T} - T_A). \quad (104)$$

A partir da Eq. (103) pode-se isolar a derivada temporal de \mathbf{d}_A , obtendo-se:

$$\frac{d\mathbf{d}_A}{dt} = \frac{q''}{\mathbf{r} \mathbf{l}} + \frac{k(\bar{T} - T_A)}{\mathbf{r} \mathbf{l} f(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)}. \quad (105)$$

Analisando a Eq. (76), pode-se concluir que, no período de ablação, $\frac{d\bar{T}}{dt} = 0$ e,

portanto, a Eq. (104) pode ser escrita como:

$$\mathbf{r} c_P \frac{d\mathbf{d}_P}{dt} = \left(\frac{k}{f(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)} - \mathbf{r} c_P \frac{d\mathbf{d}_A}{dt} \right) \frac{(\bar{T} - T_A)}{(T_O - \bar{T})}. \quad (106)$$

Inserindo a Eq. (76) na equação anterior e após alguma manipulação algébrica obtém-se:

$$\frac{d \mathbf{d}_P}{dt} = \frac{kn}{f \mathbf{r} c_P (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)} - n \frac{d \mathbf{d}_A}{dt}. \quad (107)$$

Subtraindo-se $\frac{d \mathbf{d}_A}{dt}$ de ambos os lados da Eq. (107) e inserindo-se a Eq. (105), do lado direito da expressão obtém-se:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A) = \frac{kn}{f \mathbf{r} c_P (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)} - (n+1) \left(\frac{q''}{\mathbf{r} \mathbf{l}} + \frac{k(\bar{T} - T_A)}{\mathbf{r} \mathbf{l} f (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)} \right). \quad (108)$$

Inserindo-se a Eq. (76) na equação e após alguma manipulação:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A) = \frac{kn(T_A - T_O)}{\mathbf{r} \mathbf{l} f (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)} \left(\frac{\mathbf{l}}{c_P (T_A - T_O)} + 1 \right) - \frac{(n+1)q''}{\mathbf{r} \mathbf{l}}. \quad (109)$$

Definindo-se a variável $\mathbf{t} \equiv \int_{t_A}^t \frac{(n+1)q''(t)}{\mathbf{r} \mathbf{l}} dt$ e fazendo a mudança de variável de diferenciação, onde agora, assume-se \mathbf{d}_P e \mathbf{d}_A dependentes de \mathbf{t} , a equação anterior toma a forma:

$$\frac{d}{d \mathbf{t}} (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A) = \frac{kn(T_A - T_O)}{(n+1) f q''(t) (\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)} \left(\frac{\mathbf{l}}{c_P (T_A - T_O)} + 1 \right) - 1. \quad (110)$$

Definindo-se o termo penetração relativa como $u \equiv \mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A$, o número inverso de Stefan como $\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{l}}{c_P (T_A - T_O)}$, a função auxiliar $F \equiv \frac{kn(T_A - T_O)(\mathbf{n} + 1)}{f(n+1)q''}$ e substituindo essas definições na Eq. (110), esta toma a forma:

$$\frac{du}{d \mathbf{t}} = \frac{F}{u} - 1. \quad (111)$$

A Eq. (111), como já apresentado na Eq. 53, é conhecida como Eq. de Abel de segundo tipo, cuja solução é:

$$u = F \left(LambertW \left\{ \left(\frac{u_A}{F} - 1 \right) \exp \left[\frac{u_A}{F} - 1 - \frac{t}{F} \right] \right\} + 1 \right), \quad (112)$$

onde u_A é a diferença entre \mathbf{d}_A e \mathbf{d}_p no instante t_A , obtida através da simplificação da Eq. (87) para $T_2 = T_A$ cuja forma funcional pode ser observada na expressão a seguir:

$$u_A = \frac{k n (T_A - T_O)}{f (n+1) q_A''}, \quad (113)$$

onde q_A'' é o valor de q'' no instante t_A . Como também já observado, a função LambertW, conforme Corless *et al.* (1996), é a função resposta analítica para a equação $y e^y = x$ que passa pela origem.

A partir da Eq. (113) e da definição de F , pode-se afirmar que:

$$\frac{u_A}{F} = \frac{q''}{q_A'' (n+1)}. \quad (114)$$

Substituindo a Eq. (114) e as devidas definições na Eq. (112) obtêm-se:

$$u = \frac{k n (T_A - T_O)}{f (n+1) q''} (n+1) \cdot \left(LambertW \left\{ \left(\frac{q'' - q_A''}{q_A'' (n+1)} - \frac{n}{(n+1)} \right) \exp \left[\frac{q'' - q_A''}{q_A'' (n+1)} - \frac{n}{(n+1)} - \frac{f (n+1)^2 q''}{r I k n (T_A - T_O) (n+1)} \int_{t_A}^t q'' dt \right] \right\} + 1 \right). \quad (115)$$

Considerando-se q'' constante, observa-se que:

$$u = \frac{k n (T_A - T_O)}{f (n+1) q''} (n+1) \cdot \left(LambertW \left\{ \left(-\frac{n}{n+1} \right) \exp \left[-\frac{n}{n+1} - \frac{f (n+1)^2 q''^2 (t - t_A)}{r I k n (T_A - T_O) (n+1)} \right] \right\} + 1 \right). \quad (116)$$

Agora, fazendo-se a substituição de variáveis na Eq. (105) e inserindo a Eq. (76), esta toma a forma:

$$\frac{d\mathbf{d}_A}{d\mathbf{t}} \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{(n+1)q''}{(n+1)\mathbf{r}l} - \frac{kn(T_A - T_O)}{f(n+1)\mathbf{r}l(\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_A)}. \quad (117)$$

Com alguma manipulação algébrica, pode-se chegar na seguinte expressão:

$$\frac{d\mathbf{d}_A}{d\mathbf{t}} = \frac{1}{(n+1)} - \frac{kn(T_A - T_O)}{f(n+1)^2 q'' u}. \quad (118)$$

Integrando ambos os lados por \mathbf{t} entre 0 e \mathbf{t} , obtém-se a expressão:

$$\mathbf{d}_A - \mathbf{d}_{AO} = \frac{\mathbf{t}}{(n+1)} + \frac{kn(T_A - T_O)}{f(n+1)^2 q''} \int_0^{\mathbf{t}} -\frac{1}{u} d\mathbf{t}. \quad (119)$$

Inserindo-se a Eq. (115) e resolvendo a integral obtém-se:

$$\mathbf{d}_A - \mathbf{d}_{AO} = \frac{\mathbf{t}}{(n+1)} + \frac{kn(T_A - T_O)}{f(n+1)^2 q''} \ln \left(LambertW \left\{ \left(\frac{u_A}{F} - 1 \right) \exp \left[\frac{u_A}{F} - 1 - \frac{\mathbf{t}}{F} \right] \right\} \right)_0^{\mathbf{t}}. \quad (120)$$

A equação anterior, após algum algebrismo, tem a forma:

$$\mathbf{d}_A - \mathbf{d}_{AO} = \frac{\mathbf{t}}{(n+1)} + \frac{kn(T_A - T_O)}{f(n+1)^2 q''} \left[\frac{u_A}{F} - 1 - \frac{\mathbf{t}}{F} - LambertW \left\{ \left(\frac{u_A}{F} - 1 \right) \exp \left[\frac{u_A}{F} - 1 - \frac{\mathbf{t}}{F} \right] \right\} \right]. \quad (121)$$

Utilizando-se os parâmetros já definidos anteriormente, pode-se reescrever esta equação de forma compacta, resultando em:

$$\mathbf{d}_A - \mathbf{d}_{AO} = \frac{\mathbf{n} \mathbf{t}}{(n+1)(\mathbf{n}+1)} + \frac{u_A}{(n+1)(\mathbf{n}+1)} - \frac{u}{(n+1)(\mathbf{n}+1)}. \quad (122)$$

Esta expressão pode ainda ser escrita da seguinte forma completa:

$$\mathbf{d}_A = \mathbf{d}_{Ao} + \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{rI}(\mathbf{n}+1)} \int_{t_A}^t q' dt + \frac{k n (T_A - T_o)}{f q_A'' (n+1)^2 (\mathbf{n}+1)} - \frac{k n (T_A - T_o)}{f q' (n+1)^2} \left\{ LambertW \left[\left(\frac{q' - q_A'}{q_A'' (\mathbf{n}+1)} - \frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}+1)} \right) \exp \left[\frac{q' - q_A'}{q_A'' (\mathbf{n}+1)} - \frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}+1)} - \frac{f q' (n+1)^2}{\mathbf{rI} k n (T_A - T_o) (\mathbf{n}+1)} \int_{t_A}^t q' dt \right] \right] + 1 \right\}. \quad (123)$$

Para o caso de q'' constante, esta equação toma a forma:

$$\mathbf{d}_A = \mathbf{d}_{Ao} + \frac{\mathbf{n} q'' (t - t_A)}{\mathbf{rI}(\mathbf{n}+1)} - \frac{k n (T_A - T_o)}{f q'' (n+1)^2} \left\{ LambertW \left[\left(-\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}+1} \right) \exp \left[-\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}+1} - \frac{f (n+1)^2 q''^2 (t - t_A)}{\mathbf{rI} k n (T_A - T_o) (\mathbf{n}+1)} \right] \right] + 1 - \frac{1}{\mathbf{n}+1} \right\}. \quad (124)$$

Da definição de u temos:

$$\mathbf{d}_p = u + \mathbf{d}_A. \quad (125)$$

Substituindo nesta equação a expressão compacta de \mathbf{d}_A dada pela Eq. (122), tem-se:

$$\mathbf{d}_p = \frac{\mathbf{n} t}{(\mathbf{n}+1)(\mathbf{n}+1)} + \frac{u_A}{(\mathbf{n}+1)(\mathbf{n}+1)} + \frac{((\mathbf{n}+1)(\mathbf{n}+1)-1)u}{(\mathbf{n}+1)(\mathbf{n}+1)} + \mathbf{d}_{Ao}, \quad (126)$$

ou ainda, na forma completa,

$$\mathbf{d}_p = \mathbf{d}_{Ao} + \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{rI}(\mathbf{n}+1)} \int_{t_A}^t q' dt + \frac{k n (T_A - T_o)}{f q_A'' (n+1)^2 (\mathbf{n}+1)} + \frac{((\mathbf{n}+1)(\mathbf{n}+1)-1) k n (T_A - T_o)}{(\mathbf{n}+1)^2 f q'} \left\{ LambertW \left[\left(\frac{q' - q_A'}{q_A'' (\mathbf{n}+1)} - \frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}+1)} \right) \exp \left[\frac{q' - q_A'}{q_A'' (\mathbf{n}+1)} - \frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}+1)} - \frac{f q' (n+1)^2}{\mathbf{rI} k n (T_A - T_o) (\mathbf{n}+1)} \int_{t_A}^t q' dt \right] \right] + 1 \right\}. \quad (127)$$

Para o caso de q'' constante, tem-se:

$$d_p = d_{Ao} + \frac{n q'' (t - t_A)}{r I (n+1)} + \frac{k n (T_A - T_o)}{f q'' (n+1)^2} \left((n+1)(n+1) - 1 \right) \left(LambertW \left\{ \left(-\frac{n}{n+1} \right) \exp \left[-\frac{n}{n+1} - \frac{f (n+1)^2 q''^2 (t - t_A)}{r I k n (T_A - T_o) (n+1)} \right] \right\} + 1 \right) + \frac{1}{(n+1)} \quad (128)$$

Esta expressão determina a posição da frente de penetração de calor para o período ablativo, e é muito útil para o projeto de sistemas de proteção térmica de veículos de reentrada.

4 Comparação Entre Resultados Teóricos e Solução da Literatura

Os modelos matemáticos desenvolvidos no presente trabalho, tanto para fase pré-ablativa quanto para a ablativa, são aplicados a um caso, retirado da literatura, utilizado como padrão de comparação em diversos trabalhos.

4.1 Solução Numérica de Blackwell

O caso mais utilizado como referência nos trabalhos recentes sobre ablação de uma substância pura com fluxo de calor constante é o problema de ablação de Teflon resolvido por Blackwell (1988) de forma numérica. Este autor adotou o método de volumes finitos usando função exponencial como função interpoladora para a solução de transferência de calor com ablação em um material de dimensões finitas. A estrutura utilizada por Blackwell é composta de uma camada de 0.1 in de espessura de Teflon e outra de 0.1 in de alumínio. A camada de Teflon tem uma face exposta a um fluxo de calor constante e a outra em perfeito contato com o alumínio, enquanto que o alumínio apresenta a face oposta ao Teflon, perfeitamente isolada.

Blackwell considera que toda a estrutura possui propriedades constantes e uma temperatura inicial uniforme, T_o . No instante t_o a camada de Teflon começa-se a ser aquecida com fluxo constante, q'' , até o instante t_A , no qual a superfície atinge a temperatura de ablação, T_A . A partir do instante t_A começa a ocorrer a ablação da camada de Teflon. Blackwell apresenta como solução deste problema os perfis de temperatura do Teflon no gráfico mostrado na Fig. 9, para vários instantes de tempo, onde a posição em que a temperatura é igual a 1500 R indica a posição da frente de ablação naquele instante.

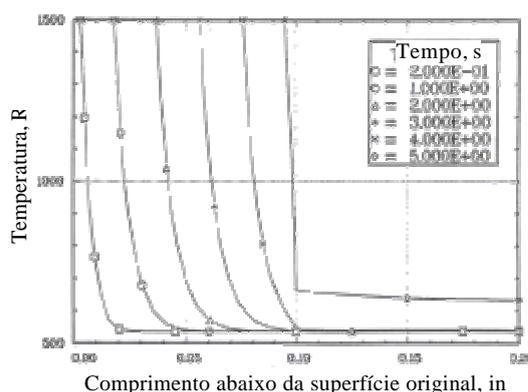


Figura 9 – Gráfico original de Blackwell (1988) que será utilizado como referência.

Os dados de posição e temperatura obtidos a partir do gráfico da Fig. 9 serão utilizados como referência para as comparações deste capítulo. Assim, serão utilizados os mesmos dados (propriedades termofísicas, temperaturas e fluxo de calor) adotados por Blackwell, conforme mostrados na Tabela 2. Além desses dados, as mesmas condições iniciais utilizadas por Blackwell foram impostas ao problema: $d_A|_{t=0} = 0$, $d_P|_{t=0} = 0$ e $t_0 = 0$.

Tabela 2 – Dados utilizados por Blackwell.

Condutividade Térmica (k)	$3.6 \cdot 10^{-5} \text{ Btu} / \text{ft s R}$
Densidade (r)	$120 \text{ lb}_m / \text{ft}^3$
Capacidade calorífica a pressão constante (c_p)	$0.3 \text{ Btu} / \text{lb}_m \text{ R}$
Calor Latente de ablação (I)	$1000 \text{ Btu} / \text{lb}_m$
Temperatura de ablação (T_A)	1500 R
Temperatura inicial (T_0)	536 R
Fluxo de calor incidente (q'')	$250 \text{ Btu} / \text{ft}^2 \text{ s}$

É importante observar que o perfil de temperatura para o instante 5.0 s será descartado nesse trabalho e o do instante 4.0 s deve ser utilizado com cuidado, devido a presença do alumínio, que confronta a hipótese de sólido semi-infinito, adotada no

desenvolvimento dos modelos matemáticos obtidos pelo método de analogia elétrica e pelo método integral.

Balckwell (1988) fornece uma solução analítica para o cálculo do tempo de início do fenômeno de ablação, t_A , apresentada na Eq. (129):

$$t_A = \frac{\mathbf{P}}{4} k r c_p \left(\frac{(T_A - T_o)}{q''} \right)^2 + t_o. \quad (129)$$

Essa expressão foi obtida da solução do aquecimento por fluxo constante de um sólido semi-infinito de propriedades constantes, apresentada por Carslaw e Jaegar (1959), que representa o período pré-ablativo. Blackwell (1988) utiliza a Eq. (129) para comparar com o resultado numérico obtido.

Aparentemente seria possível considerar o período ablativo como um problema de transferência de calor linear onde a temperatura na superfície exposta ao fluxo térmico é considerada constante, conforme a condição de contorno dada pela Eq. (13). Carslaw e Jaegar (1959) apresentam solução exata para este problema e com esta solução seria possível obter-se uma expressão para a frente de ablação através da resolução da Eq. (14). Porém, na realidade, o que existe no período ablativo é um sistema acoplado de duas equações diferenciais, Eqs. (8) e (14), que não pode ser resolvido independentemente sem perda de precisão nos resultados. Isso pode ser melhor observado para o caso em que a Eq. (14) é introduzida na Eq. (8) através de uma mudança da variável espacial e que apresenta mais claramente a não linearidade do problema.

Os dados de temperatura em função da distância, utilizados na comparação com os resultados do presente modelo, são obtidos diretamente do gráfico da Fig. 9. O software SACRID[®], obtido no endereço: www.wlsantos.hpg.com.br/sacrid.htm, foi utilizado para obter as coordenadas numéricas. O procedimento consiste, primeiro, em se determinar os eixos e, a seguir, os pontos escolhidos sobre a curva. Na etapa de determinação dos eixos, o usuário deve indicar um mínimo de quatro pontos do gráfico e as respectivas coordenadas. O software fornece informações estatísticas para os eixos apresentados na Tabela 3, onde X é a posição e Y é a temperatura.

Tabela 3 – Estatística de escala fornecida pelo SACRID[®].

Erro Médio em X:	0.25 %	Erro Médio em Y:	0.05 %
Erro Máximo em X:	0.73 %	Erro Máximo em Y:	0.17 %
Desvio Padrão em X:	0.25 %	Desvio Padrão em Y:	0.05 %

Na segunda etapa, indicam-se os pontos de interesse sobre o gráfico e o software obtém os valores das coordenadas de interesse por interpolação numérica a partir dos valores de escala escolhidos na primeira etapa.

4.2 Solução pelo Método Integral

Para a solução do problema proposto utilizando o método de solução integral são utilizadas as equações desenvolvidas na seção 3.2.1, mostradas novamente na Tabela 4 a seguir.

Tabela 4 – Expressões utilizadas para a solução teórica do problema de ablação através do método de solução integral.

Período Pré–Ablativo:		
Perfil de temperatura	$T = \frac{q''(d_p - d_A)}{kn} \left(\frac{d_p - x}{d_p - d_A} \right)^n + T_O, \text{ em } d_A \leq x \leq d_p$ $T = T_O, \text{ em } x \geq d_p$	Eq. (25)
Posição da frente de penetração do calor	$d_p = d_A + \sqrt{(d_{pO} - d_A)^2 + \left(\frac{kn(n+1)}{rc_p q'} \int_{t_0}^t (q'') dt \right)}$	Eq. (31)
Período Ablativo:		
Perfil de temperatura	$T = (T_A - T_O) \left(\frac{d_p - x}{d_p - d_A} \right)^n + T_O, \text{ em } d_A \leq x \leq d_p$ $T = T_O, \text{ em } x \geq d_p$	Eq. (43)
Posição da frente de ablação	$d_A = d_{AO} + \frac{n}{r l (n+1)} \int_{t_A}^t q' dt + \frac{kn(T_A - T_O)}{q_A''(n+1)(n+1)} - \frac{kn(T_A - T_O)}{q''(n+1)}$ $\left(\text{LambertW} \left\{ \left[\left(\frac{q'' - q_A''}{q_A''(n+1)} - \frac{n}{(n+1)} \right) \cdot \exp \left[\frac{q' - q_A'}{q_A''(n+1)} - \frac{n}{(n+1)} - \frac{q''(n+1) \int_{t_A}^t q'' dt}{r l kn(T_A - T_O)(n+1)} \right] \right] \right\} + 1 \right)$	Eq. (65)

Posição da frente de penetração do calor	$d_p = d_{Ao} + \frac{n}{r l (n+1)} \int_{t_o}^t q'' dt + \frac{kn(T_A - T_o)}{q_A''(n+1)(n+1)} + \frac{((n+1)(n+1)-1)kn(T_A - T_o)}{(n+1)q'}$ $\left(\text{LambertW} \left[\exp \left[\frac{q'' - q_A''}{q_A''(n+1)} - \frac{n}{(n+1)} - \frac{q''(n+1) \int_{t_o}^t q'' dt}{r l kn(T_A - T_o)(n+1)} \right] \right] + 1 \right)$	Eq. (69)
--	---	----------

Na tabela anterior, $n \equiv \frac{l}{c_p(T_A - T_o)}$ e, para fluxo constante,

$$t_A = \frac{n}{(n+1)} k r c_p \left(\frac{(T_A - T_o)}{q'} \right)^2 + t_o, \text{ conforme a Eq. (37). A única variável ainda não}$$

definida para a utilização das equações acima é o grau da função, n . As equações mostradas na tabela anterior foram implementadas utilizando o software de manipulação algébrica MAPLE®, cujas planilhas se encontram no Apêndice A. Os gráficos apresentados nas Seções 4.6 e 4.7 foram gerados a partir destas planilhas.

4.3 Solução pelo Método de Analogia Elétrica

Para a solução do problema proposto utilizando o método de analogia elétrica, usam-se as equações desenvolvidas na seção 3.2.2, novamente apresentadas na Tabela 5.

Tabela 5 – Expressões utilizadas para a solução teórica do problema de ablação utilizando o método de analogia elétrica.

Período Pré–Ablativo:		
Perfil de temperatura	$T = (T_2 - T_o) \left(\frac{d_p - x}{d_p - d_A} \right)^n + T_o, \text{ em } d_A \leq x \leq d_p$ $T = T_o, \text{ em } x \geq d_p$	Eq. (75)
Temperatura média interna	$\bar{T} = \frac{(T_2 - T_1)}{n+1} + T_1$	Eq. (76)
Temperatura de superfície	$T_2 = \frac{q'' f(d_p - d_A)(n+1)}{kn} + T_o$	Eq. (87)
Posição da frente de penetração do calor	$d_p = d_A + \sqrt{(d_{Po} - d_A)^2 + \left(\frac{kn}{f r c_p q''} \right) \int_{t_o}^t (q'') dt}$	Eq. (92)

Período Ablativo:		
Perfil de temperatura	$T = (T_A - T_O) \left(\frac{d_P - x}{d_P - d_A} \right)^n + T_O, \text{ em } d_A \leq x \leq d_P$ $T = T_O, \text{ em } x \geq d_P$	Eq. (75)
Posição da frente de ablação	$d_A = d_{A0} + \frac{n}{rI(n+1)} \int_{t_A}^i q' dt + \frac{kn(T_A - T_O)}{f q_A'' (n+1)^2 (n+1)} - \frac{kn(T_A - T_O)}{f q'' (n+1)^2}$ $\left(\text{LambertW} \left\{ \left[\left(\frac{q'' - q_A''}{q_A'' (n+1)} - \frac{n}{(n+1)} \right) \cdot \exp \left[\frac{q'' - q_A''}{q_A'' (n+1)} - \frac{n}{(n+1)} - \frac{f q'' (n+1)^2 \int_{t_A}^i q'' dt}{rI k n (T_A - T_O) (n+1)} \right] \right] \right\} + 1 \right)$	Eq. (123)
Posição da frente de penetração do calor	$d_P = d_{A0} + \frac{n}{rI(n+1)} \int_{t_A}^i q'' dt + \frac{kn(T_A - T_O)}{f q_A'' (n+1)^2 (n+1)} + \frac{(n+1)(n+1)-1}{(n+1)^2} \frac{kn(T_A - T_O)}{f q''}$ $\left(\text{LambertW} \left\{ \left[\left(\frac{q'' - q_A''}{q_A'' (n+1)} - \frac{n}{(n+1)} \right) \cdot \exp \left[\frac{q'' - q_A''}{q_A'' (n+1)} - \frac{n}{(n+1)} - \frac{f q'' (n+1)^2 \int_{t_A}^i q'' dt}{rI k n (T_A - T_O) (n+1)} \right] \right] \right\} + 1 \right)$	Eq. (127)

Na Tabela 5, $n \equiv \frac{I}{c_P (T_A - T_O)}$, $f = 1 - \left(\frac{1}{n+1} \right)^n$ (ver Eq. (78)), para fluxo constante,

$t_A = \frac{n}{f (n+1)^2} k r c_P \left(\frac{T_A - T_O}{q''} \right)^2 + t_O$ (ver Eq. (96)). Como na seção anterior, a única variável ainda não definida para a utilização do sistema de equações é o grau da função, n . Analogamente, os resultados apresentados na tabela anterior foram implementados em planilha do software de manipulação algébrica MAPLE[®], mostrada no Apêndice B, que foi utilizada para gerar os gráficos das Seções 4.5 e 4.7.

4.4 Comparação entre os Tempos de Início de Ablação

De acordo com o trabalho de Blackwell (1988), t_A é dado pela Eq. (129). Igualando-se a mesma com a expressão obtida para t_A pelo método integral, Eq. (37), e simplificando obtém-se:

$$\frac{n}{(n+1)} = \frac{p}{4}. \quad (130)$$

Isolando-se n , obtém-se:

$$n = \frac{\mathbf{P}}{(4 - \mathbf{P})} = 3,659792369. \quad (131)$$

Esse valor expressa o grau da função necessário para que o valor de t_A , calculado pelo método integral seja o mesmo do calculado por Blackwell (1988).

Por outro lado, igualando a expressão de Blackwell (1988) com aquela obtida pelo método de analogia elétrica, Eq. (96), e simplificando, chega-se na equação:

$$\frac{n}{f(n+1)^2} = \frac{\mathbf{P}}{4}. \quad (132)$$

Substituindo a Eq. (78) na Eq. (132) obtém-se a expressão:

$$\frac{n}{\left(1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\sqrt[n]{n}}\right)(n+1)^2} = \frac{\mathbf{P}}{4}, \quad (133)$$

que não possui solução no domínio dos reais, como pode ser observado na Fig. 10, que apresenta um gráfico dos valores do lado esquerdo das Eqs. (130) e (133) em dependência ao grau da função, n . A inexistência de uma solução para a Eq. (133) indica que não existe valor de n para o qual o valor de t_A calculado pelo método de analogia elétrica é igual ao de Blackwell (1988).

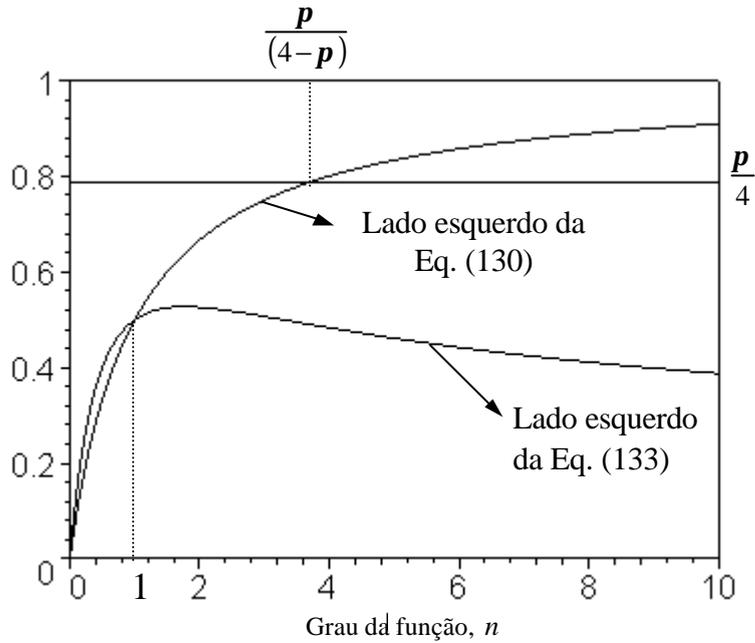


Figura 10 – Gráfico para obtenção do valor n para o cálculo de t_A .

Como apresentado na seção 3.2.2, f indica a posição relativa entre d_A e d_p em que a temperatura calculada é igual a temperatura média, \bar{T} . Uma nova expressão para o fator f é obtida através da igualdade entre as Eqs. (130) e (132), ou seja:

$$\frac{n}{(n+1)} = \frac{n}{f(n+1)^2}, \quad (134)$$

e conseqüentemente,

$$f = \frac{1}{(n+1)}. \quad (135)$$

Essa nova expressão, quando substituída nas equações obtidas pelo método de analogia elétrica, faz com que estas fiquem exatamente iguais às obtidas pelo método integral. Assim, toda a análise apresentada para o método integral também é válida para o método de analogia elétrica, quando usada a Eq. (135). A Eq. (135) somente não é válida para a localização da temperatura \bar{T} dentro do perfil de temperatura, para esse caso deve-se continuar utilizando a Eq. (78).

4.5 Comparação entre Resultados de Blackwell e Método de Analogia Elétrica

Os dados de Blackwell, conforme explicado na seção 4.1, provêm de uma simulação de uma situação física em que uma estrutura de Teflon e alumínio é aquecida por um fluxo de calor constante. A partir das equações relacionadas na seção 4.3 e dos dados relacionados na Tabela 2, simulou-se a mesma condição utilizando o método de analogia elétrica.

No gráfico da Fig. 11 apresentam-se as distribuições de temperatura em função da distância, contada a partir da superfície do material no instante zero, para os mesmos instantes de tempo que os apresentados por Blackwell, usando-se diferentes valores do grau da função, n .

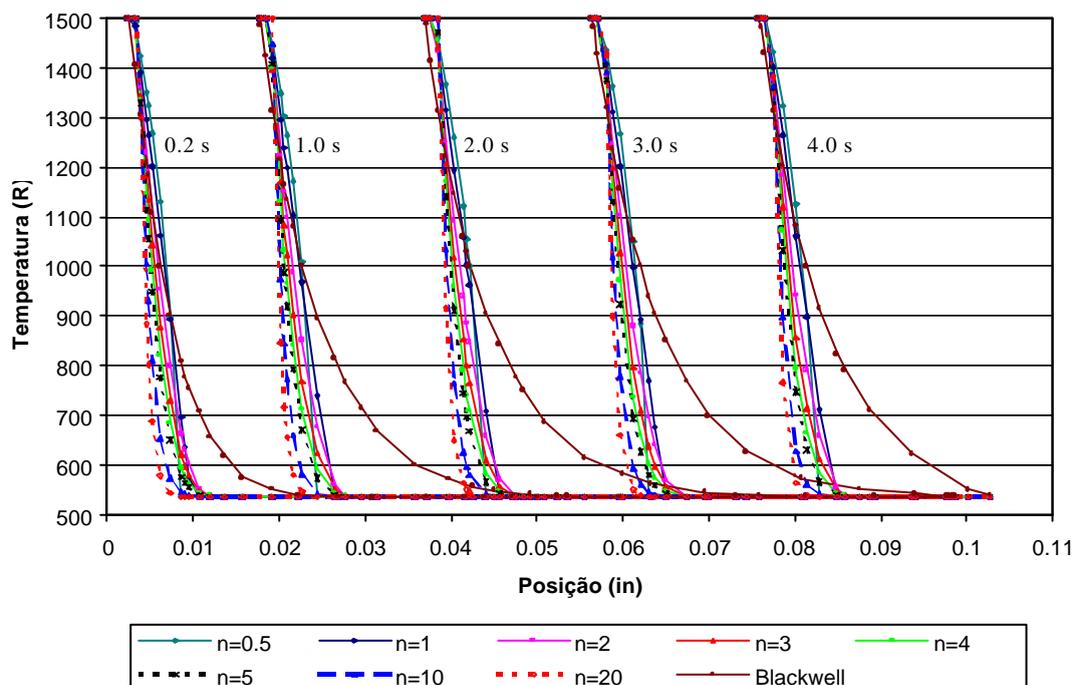


Figura 11 – Distribuição de temperaturas obtidas pelo método de analogia elétrica para diversos valores de n .

Observando-se o gráfico pode-se comparar os perfis de temperatura obtidos pelo método de analogia elétrica com diversos valores de n e os perfis de Blackwell. Através desta comparação é possível verificar uma boa concordância na previsão do comportamento térmico do material no início dos perfis de temperatura e uma

discordância na distribuição de temperatura na região final destes. Essas observações são reforçadas pelo gráfico da Fig. 12, que apresenta o erro percentual, calculado pela seguinte expressão:

$$Erro = \left(\frac{T_{Blackwell} - T}{T_{Blackwell}} \right) \cdot 100, \quad (136)$$

a partir das temperaturas apresentadas no gráfico da Fig.11, em função da posição.

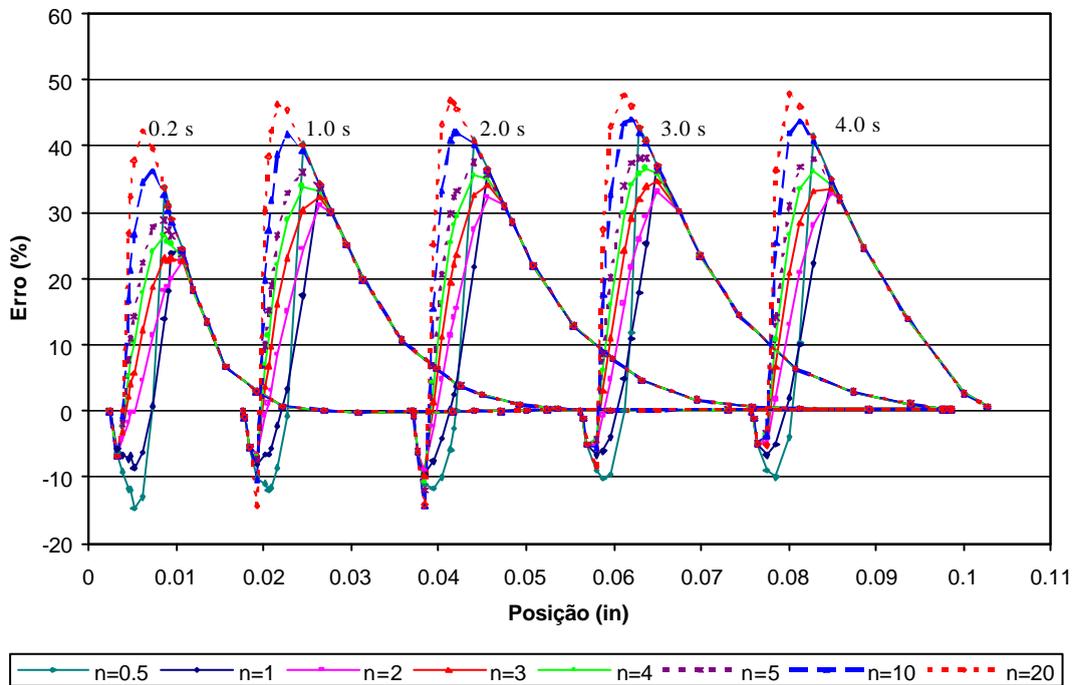


Figura 12 – Distribuição de erro entre a solução do método de analogia e os perfis de temperatura de Blackwell para diversos valores de n .

Analisando os gráficos da Figs. 11 e 12, em conjunto, pode-se observar que o erro apresenta um valor aproximadamente zero no início de cada um dos perfis, indicando a boa concordância da posição da frente de ablação. Este fato demonstra que o modelo capta bem o fenômeno de ablação, que ocorre na superfície do material.

Por outro lado, pode-se observar que a não-concordância na parte final é claramente devida à diferença nos resultados obtidos para o cálculo da frente de penetração do calor. Para compreender melhor esta discordância é interessante chamar

a atenção para o fato de que o método de analogia elétrica pode ser grosseiramente considerado como um método de discretização do fenômeno físico, que é considerado concentrado (“lumped”) em três pontos básicos, que são as temperaturas T_1 , \bar{T} e T_2 . Como a curva de temperatura apresenta um formato bastante peculiar, ou seja, bastante íngreme no início, e suave no final, qualquer discretização pouco refinada pode levar a erros consideráveis. Em outras palavras, pode-se afirmar que os resultados apresentados pelo modelo são muito sensíveis aos diferentes gradientes de temperatura encontrados nesta curva. Por isso, a correta determinação da função f é essencial para que se possa escolher a melhor posição para a temperatura média, \bar{T} .

Uma opção para a melhoria da solução para o método de analogia é substituir a expressão de f da Eq. (78) pela Eq. (135), obtida na seção 4.4. Como já observado, com essa substituição, as equações obtidas pelo método de analogia elétrica se tornam idênticas às obtidas pelo método integral, de forma que uma comparação entre apenas um dos métodos seja suficiente, lembrando porém que a localização correta da temperatura média no interior do material continua sendo calculada somente pela Eq. (78).

4.6 Comparação entre Resultados de Blackwell e Método Integral

De maneira análoga ao que foi apresentado na seção 4.5, nesta seção os resultados do método integral são comparados com os resultados obtidos por Blackwell para o caso da ablação de Teflon, utilizando os dados relacionados na Tabela 2.

O gráfico da Fig. 13 é semelhante ao gráfico da Fig. 12, onde podem ser observados os valores para o erro em função da posição, calculada pela Eq. (136), para as temperaturas obtidas pelo método integral.

Pode ser observado no gráfico da Fig. 13, que existe uma excelente concordância na parte inicial das distribuições de temperaturas, obtidas para um determinado instante de tempo fixo, também observada no método de analogia elétrica. Mas neste caso, existe também uma boa concordância na parte final, dependendo da escolha adequada do valor do grau da função n .

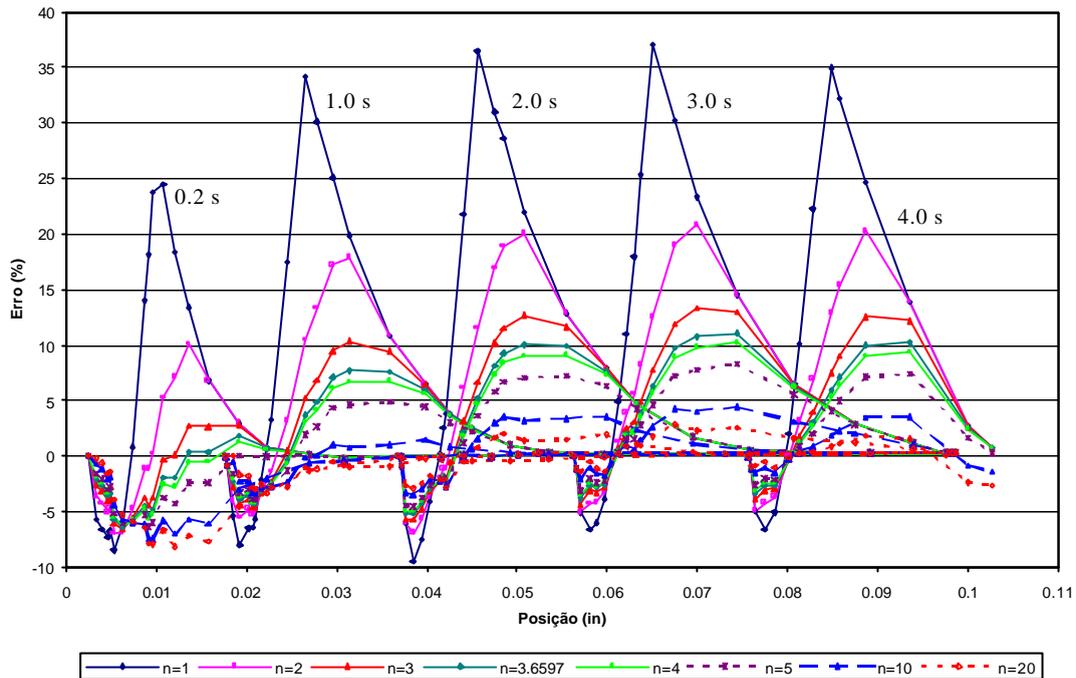


Figura 13 – Distribuição de erro entre os perfis de temperatura de Blackwell e a solução do método integral para diversos valores de n .

Os principais dados da análise de erro, de forma mais compacta, podem ser observados na Tabela 6. Por erro máximo superior entende-se o maior valor obtido para o erro em qualquer instante de tempo enquanto que, por erro máximo inferior considera-se o menor valor encontrado para o erro em qualquer instante de tempo. O erro absoluto médio é dado pelo somatório do módulo dos valores dos erros, dividido pelo número de pontos considerados.

Tabela 6 – Análise de erro da solução do método integral.

	n=1	n=2	n=3	n=3.6597	n=4	n=5	n=10	n=20
Tempo Inicial Ablação (s)	0.009635	0.012847	0.014452	0.015135	0.015416	0.016058	0.017518	0.018352
Posição Inicial Ablação (in)	0.001666	0.003332	0.004997	0.006096	0.006663	0.008329	0.016658	0.033316
Erro Max. Superior (%)	37.004	20.831	13.342	11.030	10.198	8.324	4.460	2.855
Erro Max. Inferior (%)	-9.467	-6.959	-6.561	-6.383	-6.302	-6.350	-7.444	-8.204
Dif. Abs. entre Max. (%)	46.471	27.790	19.903	17.413	16.5	14.674	11.904	11.059
Erro Abs. Médio (%)	8.916	5.095	3.684	3.198	3.023	2.644	1.916	1.678

Esta tabela mostra que os erros obtidos para a utilização de uma função de grau $n=3.6597$, calculado pela Eq. (131), não são os menores possíveis. Outros valores para

n apresentam resultados bem melhores que poderiam ser adotados. Isto significa que o melhor valor de n para o cálculo do instante de início da ablação, t_A , não necessariamente é o melhor valor para o cálculo da distribuição de temperaturas no período ablativo, porém, a determinação do melhor valor de n necessitaria de dados experimentais que não são disponíveis no momento. Por agora é aconselhável a utilização do valor $n=3.6597$ devido ao cálculo de t_A .

Na Fig. 14 é apresentado o gráfico de temperaturas em função da posição para o método integral, onde diferentes valores de n são utilizados, os quais são comparados com a curva obtida por Blackwell (1988). Observa-se que, no instante 0.2 s, as temperaturas obtidas com o método integral e com as curvas teóricas cujos valores de n são superiores ao valor calculado pela Eq. (131), são maiores que as apresentadas por Blackwell (1988), enquanto que, a partir de 1.0 s, todas as curvas calculadas estão abaixo da curva de Blackwell (1988).

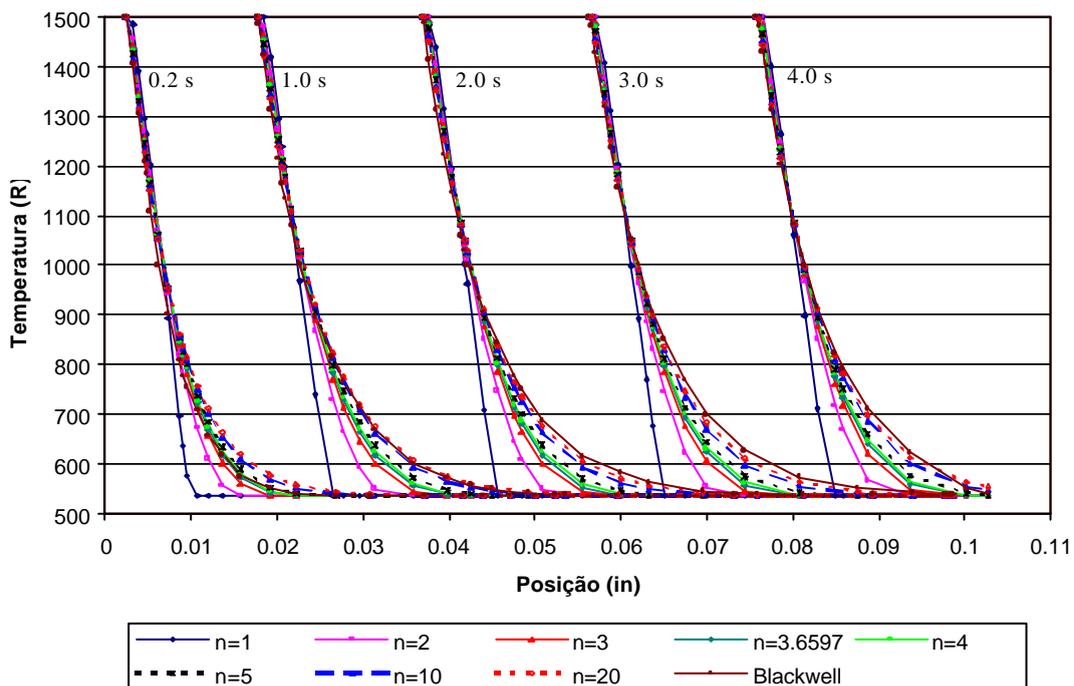


Figura 14 – Distribuição de Temperatura do Método Integral e de Blackwell.

Essas observações suportam duas prováveis conclusões: ou esses fatores se devem ao fato de Blackwell ter simulado o comportamento de uma estrutura Teflon/alumínio finita, enquanto que foi utilizada a hipótese de sólido semi-infinito para o

desenvolvimento do modelo; ou a natureza não-linear do problema faz com que a hipótese adotada de um mesmo perfil de temperaturas, com o grau da função constante, durante todo o processo, não seja suficientemente precisa. É importante verificar que estas hipóteses só poderão ser confirmadas através da realização de experimentos ou de novos dados de comparação.

4.7 Comparação entre Método Integral e Método de Analogia Elétrica

O mesmo problema apresentado por Blackwell será utilizado para comparar os dois métodos entre si, levando-se em conta dois aspectos que não puderam ser analisados na comparação anterior: a posição da frente de penetração de calor e da frente de ablação, uma vez que Blackwell não disponibilizou estes dados.

4.7.1 Posição da Frente de Ablação

Na Fig. 15, é apresentado o gráfico da posição da frente de ablação em polegadas (in), calculado pelo método integral, em função do tempo em segundos (s), durante 4.0s de simulação, para valores de n entre 1 e 10. No detalhe, pode ser observada a evolução da frente de ablação para a faixa de tempo variando do instante inicial, t_0 , até quatro vezes o valor do instante de início da ablação, t_A . Ainda, no detalhe, é indicado o grau da função utilizado. Para fins de uso de engenharia, pode-se afirmar que o grau da função não influencia consideravelmente o cálculo da posição da frente de ablação.

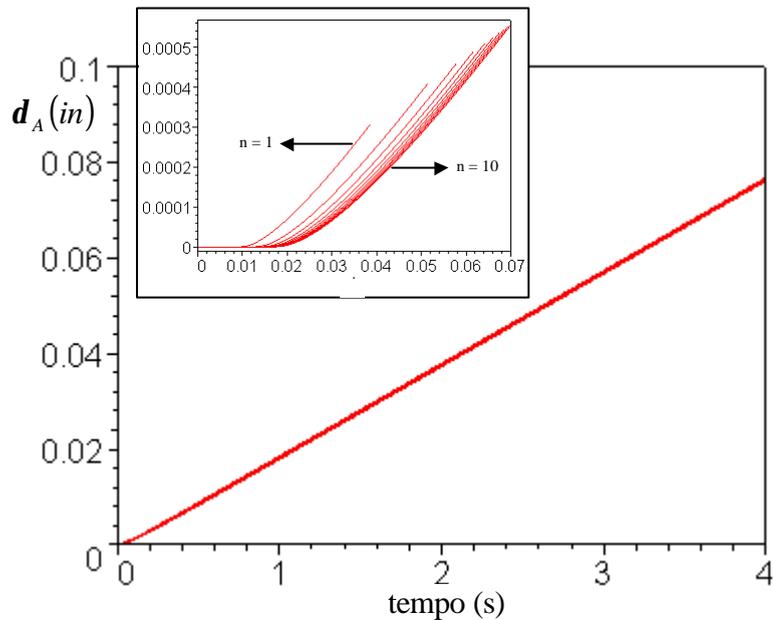


Figura 15 – Posição da frente de ablação em função do tempo calculado pelo método integral.

Já na Fig. 16, é apresentado o gráfico análogo ao da Fig. 15 com a utilização do método de analogia elétrica. Do mesmo modo que no resultado obtido para o método integral, para fins de ferramenta de engenharia, a dependência do grau da função usado para a determinação da posição da frente de ablação é desprezível. É importante ressaltar que, diferentemente do detalhe do gráfico da Fig. 15, no detalhe da Fig. 16 as curvas não estão em ordem de acordo com o valor do grau da função. Essa não-ordenação está intrinsecamente ligada à função f , sendo que, no presente caso, a Eq. (78) foi utilizada para a obtenção dos valores do gráfico. As curvas apresentadas no detalhe da Fig. 16 correspondem a seguinte ordem de cores para o grau da função, n , utilizado: 1 → azul, 2 → preto, 3 → verde, 4 → amarelo, 5 → vermelho, 6 → azul marinho, 7 → marrom, 8 → rosa, 9 → cinza e 10 → azul “cyan”. Esta ordem pode ser compreendida observando-se o gráfico da Fig. 10, onde, para uma das curvas apresentadas, os valores da ordenada são determinados pelo lado esquerdo da Eq. (133), enquanto que a abscissa corresponde ao valor de n . Quanto maior o valor da ordenada, maior é o tempo de início da ablação, t_A , e conseqüentemente mais a direita se situam as curvas mostradas no detalhe apresentado na Fig. 16. Assim, para este modelo, existe um valor de n entre 1 e 2 para o qual t_A apresenta um valor máximo.

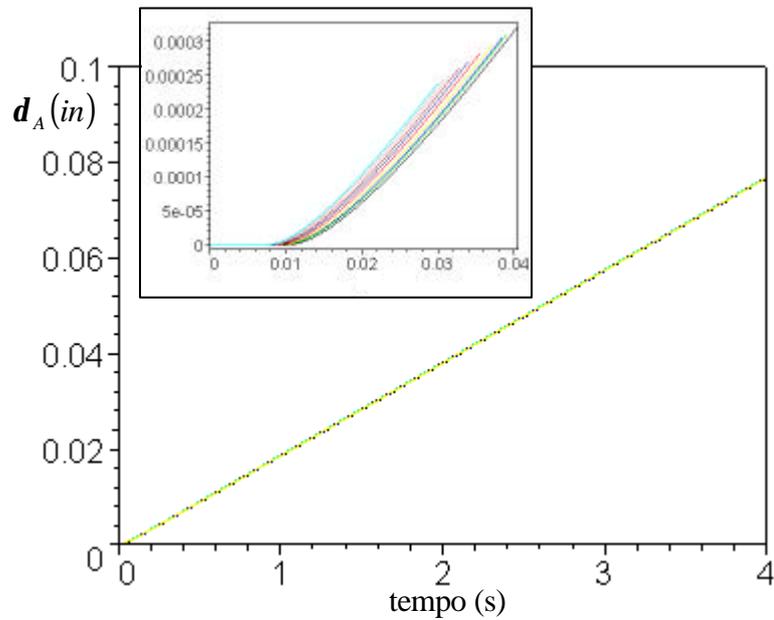


Figura 16 – Posição da frente de ablação em função do tempo calculado pelo método de analogia.

Para a comparação dos resultados obtidos pelos dois métodos, apresentados nos gráficos das Figs. 15 e 16, estes estão superpostos no gráfico da Fig. 17. Neste gráfico é demonstrado que, para a solução dos problemas de engenharia, os resultados obtidos pelos dois métodos são muito próximos e não indicam preferência pela escolha de nenhum dos dois métodos.

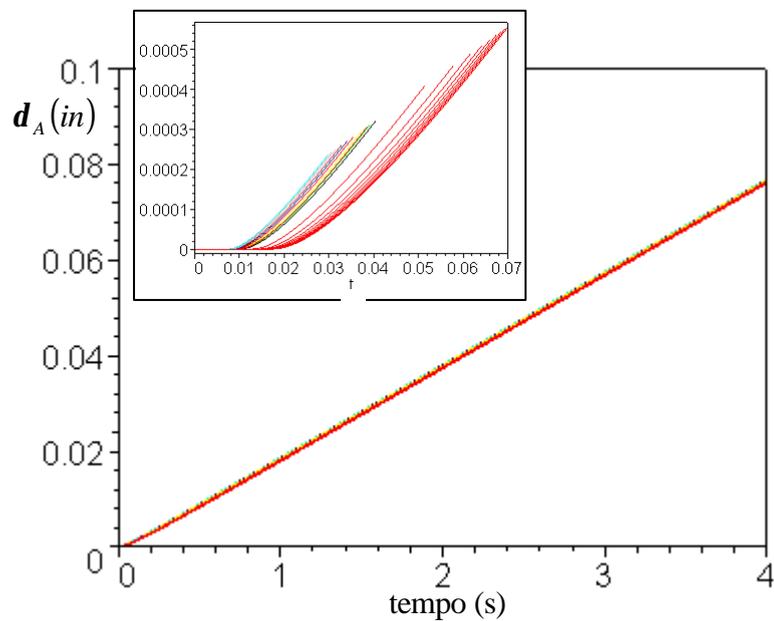


Figura 17 – Posição da frente de ablação em função do tempo com os métodos integral e de analogia.

Deve-se observar que a inclinação da curva é diretamente dependente do valor do fluxo de calor, q'' , incidente na superfície do sólido. Como o fluxo no presente

exemplo é constante, a inclinação também é constante, para tempos maiores que quatro vezes o tempo t_A .

4.7.2 Posição da frente de penetração do calor

Na Fig. 18 é apresentado o gráfico da posição da frente de penetração do calor, dado em polegadas (in), calculado pelo método integral, em função do tempo, em segundos (s), pelos mesmos 4.0 s de simulação utilizados na seção anterior. Novamente, vários valores de n , entre 1 e 10, foram utilizados. No detalhe pode ser observado o comportamento das curvas para o instante inicial, t_0 , até quatro vezes o valor do instante do início da ablação, t_A . Neste gráfico, o grau da função utilizado para o perfil de temperatura é também indicado. Os pontos marcados sobre as curvas do detalhe indicam t_A para cada um dos valores de n , portanto a curva a esquerda do ponto representa o período pré-ablativo e a direita o período ablativo.

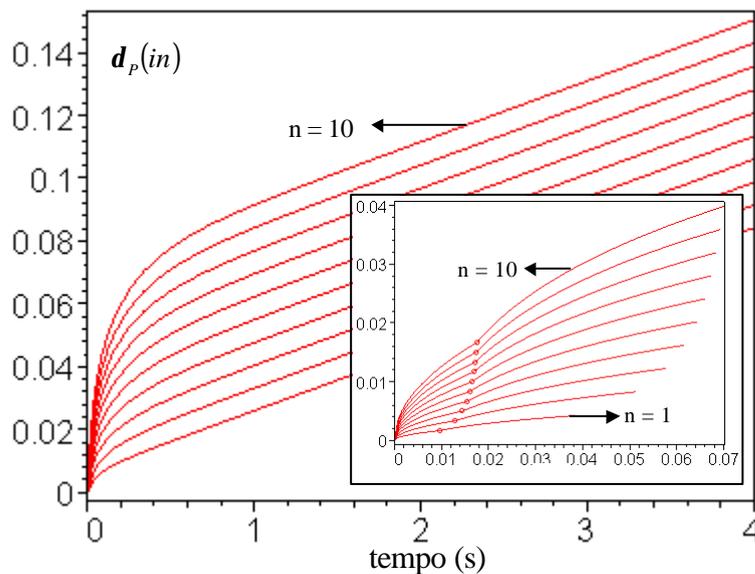


Figura 18 – Posição da frente de penetração do calor em função do tempo calculado pelo método integral.

Observa-se que, tanto para o período pré-ablativo quanto para o período ablativo, existe uma forte dependência do grau da função utilizado, diferentemente da frente de ablação que praticamente independe do grau da função escolhido. É interessante observar que no início do período ablativo o fenômeno é fortemente transiente e a derivada temporal da frente de penetração do calor é variável, até atingir um valor

constante, o qual é independente do grau da função. Desta forma, as curvas se tornam paralelas, e a inclinação é diretamente proporcional ao fluxo do calor.

De maneira semelhante, na Fig. 19, é apresentado o gráfico da posição da frente de penetração do calor, calculado pelo método de analogia elétrica, em função do tempo. No detalhe pode ser observado o comportamento da curva desde o instante inicial, t_0 , até quatro vezes o valor do instante do início da ablação, t_A . Assim como observado na Fig. 18, os pontos marcados sobre as curvas do detalhe indicam t_A para cada um dos valores de n , portanto a curva a esquerda do ponto representa o período pré-ablativo e a direita o período ablativo.

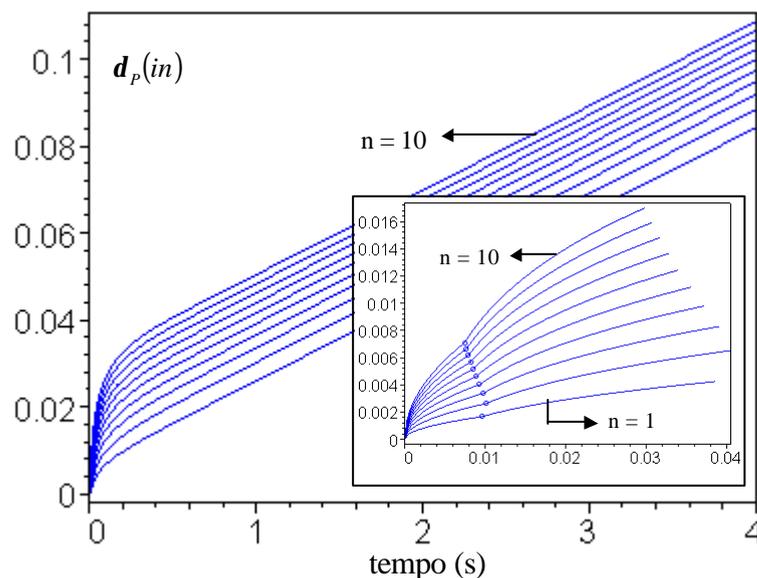


Figura 19 – Posição da frente de penetração do calor em função do tempo calculado pelo método da analogia.

Na Fig. 19 observa-se que, da mesma maneira que para o modelo integral, tanto para o período pré-ablativo quanto para o período ablativo, a dependência do grau da função existe. Também de maneira similar, observa-se o fenômeno transiente já descrito para os resultados do método integral.

Porém, na Fig. 20, em que são apresentados os gráficos das Figs. 18 e 19 sobrepostos, pode-se observar a grande diferença de resultados entre os métodos. Esta diferença explica a diversidade de resultados na distribuição de temperaturas observada na seção 4.5.

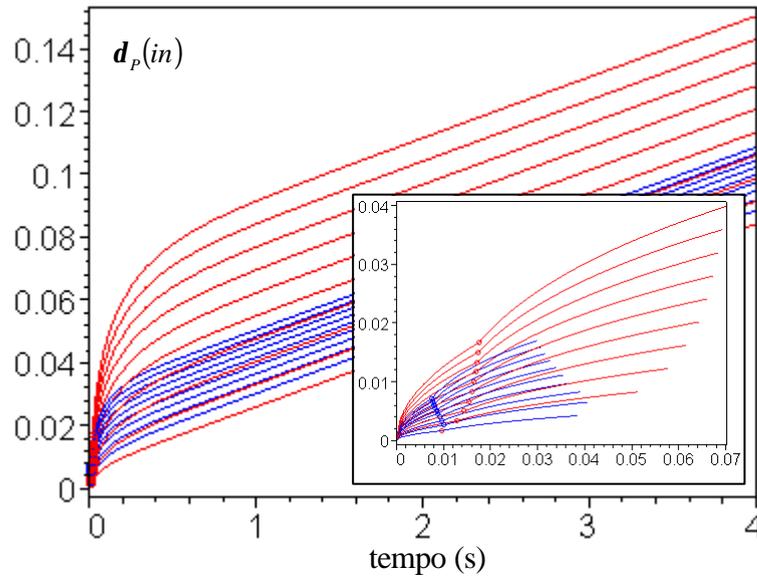


Figura 20 – Posição da frente de penetração do calor em função do tempo calculado pelos métodos integral e da analogia.

É importante ressaltar, como já foi observado, que a diferença entre os resultados para a analogia elétrica e os resultados de Blackwell pode ser minimizado com a substituição da Eq. (78) pela Eq. (135) para o cálculo do valor de f . Neste caso, os valores obtidos para todas as expressões são exatamente iguais aos obtidos pelo método integral para o mesmo valor do grau da função de temperatura.

A Fig. 21 apresenta o gráfico da penetração relativa, $u = d_p - d_A$ (ver seção 3.2.1.2), da frente de ablação e da frente de penetração do calor em função do tempo para $n = 10$. Este gráfico mostra que as velocidades das frentes são diferentes no início do processo de ablação do sistema de proteção térmica, até em torno de 1.0 s, caracterizando um período transiente. A partir de então, as frentes se movem numa mesma velocidade em um regime transitório, ou seja, o valor da declividade das duas frentes de penetração é igualmente proporcional ao valor do fluxo de calor incidente e elas não mais se distanciam.

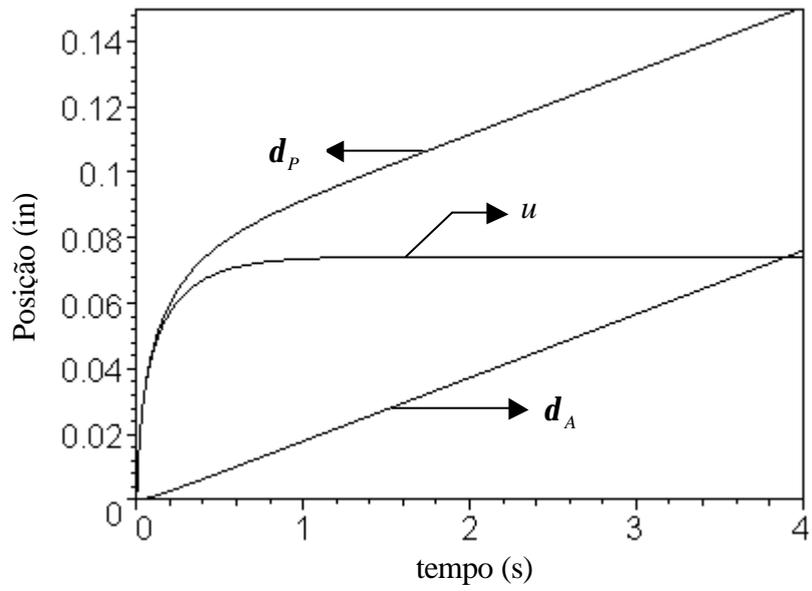


Figura 21 – Posição das frentes de penetração do calor e de ablação e a posição da penetração relativa em função do tempo calculadas pelo método integral com $n=10$.

5 Conclusões e Propostas de Desenvolvimentos Futuros

Neste trabalho foram desenvolvidos dois métodos analíticos, o método de analogia elétrica e o método de balanço de calor integral, para a solução do problema unidimensional de transferência de calor com ablação. O objetivo de tal desenvolvimento era a obtenção de uma ferramenta de engenharia para projeto de sistemas de proteção térmica do tipo ablativo, ao nível de engenharia. As soluções obtidas foram comparadas com os resultados numéricos obtidos a partir do trabalho de Blackwell (1988).

O método de analogia elétrica se mostrou preciso quanto a previsão do comportamento da frente de ablação. Quanto à frente de penetração do calor no material, esta comparação não foi tão positiva, mostrando discrepâncias na parte final do perfil de temperaturas. Este método é bastante sensível à escolha da posição da temperatura média. Através da comparação entre as equações para o cálculo do instante de início da ablação entre os métodos aqui apresentados e a equação utilizada por Blackwell (1988), foi proposta uma correção empírica do modelo, que faz com que as soluções encontradas pelos dois métodos tenham o mesmo resultado.

No método de balanço integral do calor, foi proposto um perfil de temperatura dado por uma função de grau n , a partir da qual foi obtida uma solução analítica fechada para o problema. Essa solução apresentou uma concordância excelente com os resultados de Blackwell, tanto para a frente de penetração do calor, quanto para a frente de ablação, assim como para o próprio perfil de temperaturas.

Em ambos os métodos foi observado que o cálculo da posição da frente de ablação, para fins de engenharia, independe do grau da função escolhido. Já a posição da frente de penetração do calor apresenta uma forte dependência do grau desta função.

Deve-se observar que os métodos propostos são ambos analíticos enquanto que os métodos disponíveis na literatura são numéricos e exigem um grande número de elementos para captar com precisão os fenômenos físicos, normalmente envolvendo alto custo e tempo computacional. Os métodos desenvolvidos neste trabalho podem ser facilmente implementados com o uso de softwares de manipulação algébrica.

As soluções desenvolvidas para ambos os métodos possibilitam considerar a hipótese de que o fluxo de calor seja variável com o tempo. Pretende-se, num futuro

próximo, obter resultados teóricos que possam ser comparados com dados de literatura obtidos por Zein (1978).

Como pôde ser observado no final do Capítulo 4, a determinação do grau da função que melhor descreve a distribuição de temperaturas no material que sofre ablação em uma das faces está intimamente relacionada ao comportamento físico deste. A correta determinação deste perfil, assim como a verificação do comportamento deste com relação ao tempo, só será possível através de testes experimentais. Portanto, pretende-se, num futuro próximo, desenvolver um trabalho experimental no LABSOLAR–NCTS/UFSC, onde materiais ablativos serão controladamente aquecidos até a temperatura de ablação e seus comportamentos térmicos estudados.

Além disso, propõe-se o estudo de utilização do método de analogia elétrica para outras aplicações onde exista o fenômeno de fronteira móvel, (no presente caso a fronteira representa a mudança de fase) de modo a estender o uso desse método que se mostrou de grande interesse para projetos preliminares de engenharia.

Outras possibilidades de desenvolvimento que podem ser aqui relacionadas são: a verificação dos resultados aqui apresentados para situação de fluxo de calor incidente variável; o desenvolvimento do método integral para propriedades termofísicas dependentes da temperatura; a utilização destas soluções como condição de fronteira para métodos computacionais onde exista uma iteração térmica fluido-estrutura e se atinja a temperatura de mudança de fase da estrutura e; comparação destes métodos com outras soluções e outros problemas de modo a verificar a utilização dos mesmos em outras situações.

6 Referências Bibliográficas

1. Bertin, J.J., **Hypersonic Aerothermodynamics**, AIAA Educational Series, 1994, AIAA Inc., Washington, USA.
2. Beuken, C.L., **Econom. Techn. Tydschr.**, Maastricht, Holland, no. 1, 1937.
3. Biot, M.A., Agrawal, H.C., **Variational Analysis of Ablation for Variable Properties**, Transactions of the ASME – Journal of Heat Transfer, Aug. 1964, pp. 437-442.
4. Blackwell, B.F., **Numerical Prediction of One-Dimensional Ablation Using a Finite Control Volume Procedure with Exponential Differencing**, Numerical Heat Transfer, Vol. 14, 1988, pp. 17-34.
5. Carslaw, H. S., Jaeger, J. C., **Conduction of Heat in Solids**, 2nd ed., Oxford university Press, London, 1959.
6. Chung, B.T.F., Hsiao, J.S., **Heat Transfer with Ablation in a Finite Slab Subjected to Time-Variant Heat Fluxes**, AIAA Journal, Vol. 23, Jan. 1985, pp. 145-150.
7. Churchward, R., **Examples of Thermal Protection Systems for Reentry Vehicles**, Workshop on Thermal Technology for the Brazilian Reentry Program, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil, 2000.
8. Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E. G., Jeffrey, D. J., Knuth, D. E., **On the Lambert W Function**, Advances in Computational Mathematics, Vol. 5, 1996, pp.329-359. Disponível em: www.apmaths.uwo.ca/~rcorless/frames/PAPERS/LambertW/. Acesso em: 08 out. 2001.
9. Costa, L.E.V.L, Moraes Jr., P., **Concepção de Sistemas de Proteção Térmica para o Veículo Espacial Recuperável SARA**, 16^o Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica – XVI COBEM, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil, 2001.
10. Cotta, R.M., Ruperti, N.J., **An Improved Differential Approach for the Solution of Thermal Ablation Problems**, 8^o Encontro Nacional de Ciências Térmicas – VIII ENCIT, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil, 2000.

11. Diniz, A.J., Aparecido, J.B., **Solução Analítica para Condução de Calor em Ablação**, Seminário de Ciências Térmicas em Tecnologia Aeroespacial, São José dos Campos, São Paulo, Brasil, 1989.
12. Goodman, T.R., **Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat Transfer**, Advances in Heat Transfer, Vol. 1, Academic Press, New York, 1964, pp. 51-122.
13. Gilmore, D.G., **Fundamental Technologies**, Spacecraft Thermal Control Handbook, Vol. 1, Aerospace Press, El Segundo, California, 2002, pp. 489-522.
14. Hibbert, S.E., Markatos, N.C., Voller, V.R., **Computer simulation of moving-interface, convective, phase-change process**, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 31, No. 9, 1988, pp. 1785-1795.
15. Hogan, R.E., Blackwell, B.F., Cochran, R.J., **Application of Moving Grid Control Volume Finite Element Method to Ablation Problems**, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 10, No. 2, 1996, pp. 312-319.
16. Hogge, M., Gerrekens, P., **Two-Dimensional Deforming Finite Element Methods for Surface Ablation**, AIAA Journal, Vol. 23, No. 3, 1985, pp. 465-472.
17. Horvay, G., **Freezing of a Growing Liquid Column**, Transactions of the ASME – Journal of Heat Transfer, Feb. 1960, pp. 37-47.
18. Katte, S.S., Das, S.K., Venkateshan, S.P., **Two-Dimensional Ablation in Cylindrical Geometry**, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 14, No. 4, 2000, pp. 548-556.
19. Landau, H.G., **Heat Conduction in a Melting Solid**, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 8, 1950, pp. 81-94.
20. Leite, R.M.G., **Cálculo de Ablação com uma Abordagem Entálpica para Mudança de Fase**, Tese – Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, São Paulo, Brasil, 1999.

21. Liebmann, G., **A New Electrical Analog Method for the Solution of Transient Heat-Conduction Problems**, Transactions of ASME, Vol. 78, 1956, pp. 655-665.
22. Mohan, R.V., Tamma, K.K., Avila, A.F., **Flux-Based Finite-Volume Formulations and Adaptive Time-Stepping Strategies for Modeling of Reentry Thermal Protection Systems**, Numerical Heat Transfer: Part B, Vol. 30, 1996, pp. 117-136.
23. Moraes Jr., P., Pilchowski, H.U., **Plataforma Orbital Recuperável para Experimentação em Ambientes de Microgravidade**, 14^o Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica – XIV COBEM, Bauru, São Paulo, Brasil, 1997.
24. NASA, **NASA SP-8062 Entry Gasdynamics Heating**, 1971. Disponível em : <http://www.nasa.gov> em Out. 2002.
25. NASA, **NASA TM-101055 Hypervelocity Atmospheric Flight: Real Gas Flow Fields**, 1989. Disponível em : <http://www.nasa.gov> em Out. 2002.
26. Pashkis, V., Baker, H.D., **A Method for Determining Unsteady-State Heat Transfer by Means of an Electrical Analogy**, Transactions of ASME, vol. 64, 1942, pp. 105-112.
27. Pardini, L. C., **Físico-Química de Compósitos Termo-Estruturais**, Notas de Aula FQ-256, 2002, Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, SP.
28. Regan, F. J., Anandakrishnan, S.M., **Dynamics of Atmospheric Re-entry**, AIAA Educational Series, 1993, AIAA Inc. Washington, USA.
29. Rupert, N.J., Cotta, R.M., **Heat Conduction with Ablation in Multilayered Media**, 11^o Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica – XI COBEM, São Paulo, SP, Brasil, 1991.

30. Shih, Y.C., Cheung, F.B., **Numerical Study of the Thermal Response of High-Temperature Ablative Materials**, Numerical Heat Transfer: Part A, Vol. 32, 1997, pp. 555-574.
31. Silva Jr W.L., Wrobel, L.C., **A Boundary Element Formulation for Multi-Dimensional Ablation Problems**, 14th International Conference on the Boundary Element Method, Sevilha, Espanha, 1992.
32. Spiegel, M.R., **Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas**, Coleção Schaum, 1973, Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda., São Paulo, Brasil.
33. Storti, M., **Numerical modeling of ablation phenomena as two-phase Stefan problems**, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 38, No. 15, 1995, pp. 2843-2854.
34. Sunderland, J.E., Grosh, R.J., **Transient Temperature in a Melting Solid**, Transactions of the ASME – Journal of Heat Transfer, Nov. 1961, pp. 409-414.
35. Venkatapathy, E., **Understanding and Predicting Aerothermal Environment**, Workshop on Thermal Technology for the Brazilian Reentry Program, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil, 2000.
36. Venkateshan, S.P., Solaiappan, O., **A General Integral Method for one dimensional ablation**, Wärme-und Stoffübertragung, Vol. 25, 1990, pp. 141-144.
37. Zaparoli, E.L., **Modelos de Ablação e Soluções Numéricas**, Seminário de Ciência e Tecnologia Aeroespacial, São José dos Campos, São Paulo, Brasil, 1989.
38. Zien, T. F., **Integral Solutions of Ablation Problems with Time-Dependent Heat Flux**, AIAA Journal, Vol. 16, Dec. 1978, pp. 1287-1295.

Apêndice A – Método de Balanço de Calor Integral

A listagem apresentada abaixo foi utilizada no programa de manipulação algébrica MAPLE para a geração dos resultados do Método de Balanço Integral apresentados neste trabalho.

Cabeçalho do programa “zerando” as variáveis e chamando a biblioteca de funções gráficas:

```
> restart:with(plots):
```

Indicação da numeração das equações do método integral:

```
> # Método Integral (1);
```

Indicação da numeração do período pré-ablativo:

```
> # Pré-Ablativo (1);
```

Equação da distribuição da temperatura interna durante o período pré-ablativo:

```
> e111:=T=q*(dp-da)/(k*n)*(dp-x)^n/(dp-da)^(n+To);
```

Equação da posição da frente de penetração do calor durante o período pré-ablativo:

```
> e112:=dp=dao+sqrt((dpo-dao)^2+(k*n*(n+1)*t)/(rho*cp));
```

Indicação da numeração do período ablativo:

```
> # Ablativo(2);
```

Equação da distribuição da temperatura interna durante o período ablativo:

```
> e121:=T=(Ta-To)*(dp-x)^n/(dp-da)^(n+To);
```

Equação da posição da frente de penetração do calor durante o período pré-ablativo:

```
> e122:=dp=dao+nu*q*(t-ta)/(rho*lambda*(nu+1))+k*n*(Ta-To)/(q*(n+1)*(nu+1))+((n+1)*(nu+1)-1)/(n+1)*(k*n*(Ta-To))/q*(LambertW(-nu/(nu+1)*exp(-nu/(nu+1)-(n+1)*q^2*(t-ta)/(rho*lambda*k*n*(Ta-To)*(nu+1)))+1));
```

Equação da posição da frente de ablação durante o período ablativo:

```
> e123:=da=dao+nu*q*(t-ta)/(rho*lambda*(nu+1))+k*n*(Ta-To)/(q*(n+1)*(nu+1))-(k*n*(Ta-To))/(q*(n+1))*(LambertW(-nu/(nu+1)*exp(-nu/(nu+1)-(n+1)*q^2*(t-ta)/(rho*lambda*k*n*(Ta-To)*(nu+1)))+1));
```

Determinação do instante de início da ablação:

```
> e124:=ta=n/(n+1)*k*rho*cp*((Ta-To)/q)^2;
```

Entrada dos valores numéricos das constantes (valores iniciais e propriedades termofísicas):

```
> # Dados Numéricos
```

```
>
```

```
k:=0.000036;rho:=120;cp:=0.3;lambda:=1000;Ta:=1500;To:=536;
q:=250;nu:=lambda/(cp*(Ta-To));dao:=0;dpo:=0;
```

Obtenção das equações numéricas para a geração de gráficos:

```
> # Obtenção das Equações Numéricas
```

```
Determinação do instante de início da ablação:
```

```
> a1:=e124;
```

```
Equação da posição da frente de penetração do calor durante o período pré-ablativo:
```

```
> a3:=e112;
```

```
Equação da posição da frente de penetração do calor durante o período ablativo:
```

```
> a5:=(subs(a1,e122));
```

```
Equação da posição da frente de penetração do calor:
```

```
> b1:=dp=piecewise(t<rhs(a1),rhs(a3),rhs(a5));
```

```
Equação da posição da frente de ablação durante o período ablativo:
```

```
> a7:=subs(a1,e123);
```

```
Equação da posição da frente de ablação:
```

```
> b3:=da=piecewise(t<rhs(a1),dao,rhs(a7));
```

```
Equação da distribuição da temperatura interna durante o período pré-ablativo:
```

```
> a9:=subs({a3,da=dao},e111);
```

```
Equação da distribuição completa da temperatura interna durante o período pré-ablativo:
```

```
> b5:=T=piecewise(x<rhs(a3),rhs(a9),To);
```

```
Equação da distribuição da temperatura interna durante o período ablativo:
```

```
> a11:=subs({a7,a5},e121);
```

```
Equação da distribuição completa da temperatura interna durante o período ablativo:
```

```
> b7:=T=piecewise(x<=rhs(a7),Ta,x>rhs(a7) and  
x<rhs(a5),rhs(a11),To);
```

```
Equação da distribuição completa da temperatura interna:
```

```
> b9:=T=piecewise(t<rhs(a2),rhs(b5),rhs(b7));
```

```
Geração de gráficos:
```

```
> # Gráficos
```

```
Geração de gráficos da equação da posição da frente de penetração do calor com grau  
(n) de 0 a 10 e no período de 0 a 4 s.:
```

```
>
```

```
Pp:=plot3d({rhs(b1)},n=0..10,t=0..4,axes=boxed,shading=zhu  
e):
```

```
Geração de gráficos da equação da posição da frente de ablação com grau (n) de 0 a 10  
e no período de 0 a 4 s.:
```

```
>
Pa:=plot3d( {rhs(b3)} ,n=0..10,t=0..4,axes=boxed,shading=zhue):
```

Apresentação de gráficos da equação da posição da frente de penetração do calor e da posição da frente de ablação com grau (n) de 0 a 10 e no período de 0 a 4 s.:

```
> display(Pp); display(Pa);
```

Determinação do grau n_f , do instante t_f e cálculo da posição x_f , que indica a posição da frente de penetração do calor para o instante t_f com o grau n_f :

```
> nf:=10;tf:=4;xf:=evalf(subs({t=tf,n=nf},rhs(b1)));
```

Geração de gráficos da equação da distribuição completa da temperatura interna no intervalo de 0 a x_f em x e no período de 0 a t_f em t com grau (n) igual a n_f :

```
>
PT:=plot3d(subs(n=nf,rhs(b9)),x=0..xf,t=0..tf,axes=boxed,shading=zhue):
```

Apresentação de gráficos da equação da distribuição completa da temperatura interna no intervalo de 0 a x_f em x e no período de 0 a t_f em t :

```
> display(PT);
```

Apêndice B – Método de Analogia Elétrica

A listagem apresentada abaixo foi utilizada no programa de manipulação algébrica MAPLE para a geração dos resultados do Método de Balanço Integral apresentados neste trabalho.

Cabeçalho do programa “zerando” as variáveis e chamando a biblioteca de funções gráficas:

```
> restart:with(plots):
```

Indicação da numeração das equações do método integral:

```
> # Analogia Elétrica (2);
```

Indicação da numeração do período pré-ablativo:

```
> # Pré-Ablativo (1);
```

Equação da distribuição da temperatura interna durante o período pré-ablativo:

```
> e211:=T=(T2-To)*(dp-x)^n/(dp-da)^n+To;
```

Equação da posição da frente de penetração do calor durante o período pré-ablativo:

```
> e212:=dp=dao+sqrt((dpo-dao)^2+(k*n*t)/(f*rho*cp));
```

Equação da temperatura da superfície do material durante o período pré-ablativo:

```
> e213:=T2=q*f*(n+1)*(dp-da)/(k*n)+To; >
```

Indicação da numeração do período ablativo:

```
> # Ablativo (2);
```

Equação da distribuição da temperatura interna durante o período ablativo:

```
> e221:=T=(Ta-To)*(dp-x)^n/(dp-da)^n+To;
```

Equação da posição da frente de penetração do calor durante o período pré-ablativo:

```
> e222:=dp=dao+nu*q*(t-ta)/(rho*lambda*(nu+1))+k*n*(Ta-To)/(q*(n+1)^2*f*(nu+1))+((n+1)*(nu+1)-1)/(n+1)^2*(k*n*(Ta-To))/f/q*(LambertW(-nu/(nu+1)*exp(-nu/(nu+1)-f*(n+1)^2*q^2*(t-ta)/(rho*lambda*k*n*(Ta-To)*(nu+1))))+1);
```

Equação da posição da frente de ablação durante o período ablativo:

```
> e223:=da=dao+nu*q*(t-ta)/(rho*lambda*(nu+1))+k*n*(Ta-To)/(f*q*(n+1)^2*(nu+1))-k*n*(Ta-To)/(f*q*(n+1)^2*(LambertW(-nu/(nu+1)*exp(-nu/(nu+1)-f*(n+1)^2*q^2*(t-ta)/(rho*lambda*k*n*(Ta-To)*(nu+1))))+1);
```

Determinação do instante de início da ablação:

```
> e224:=ta=n/f/(n+1)^2*k*rho*cp*((Ta-To)/q)^2
```

Determinação da posição da temperatura média:

```
> e225:=f=1-(n+1)^(-1/n);
```

Entrada dos valores numéricos das constantes (valores iniciais e propriedades termofísicas):

```
> # Dados Numéricos
```

```
>
```

```
k:=0.000036;rho:=120;cp:=0.3;lambda:=1000;Ta:=1500;To:=536  
;q:=250;nu:=lambda/(cp*(Ta-To));dao:=0;dpo:=0;
```

Obtenção das equações numéricas para a geração de gráficos:

```
> # Obtenção das Equações Numéricas
```

Determinação do instante de início da ablação:

```
> a2:=subs(e225,e224);
```

Equação da posição da frente de penetração do calor durante o período pré-ablativo:

```
> a4:=subs(e225,e212);
```

Equação da posição da frente de penetração do calor durante o período ablativo:

```
> a6:=subs(e225,subs(a2,e222));
```

Equação da posição da frente de penetração do calor:

```
> b2:=dp=piecewise(t<rhs(a2),rhs(a4),rhs(a6));
```

Equação da posição da frente de ablação durante o período ablativo:

```
> a8:=subs(e225,subs(a2,e223));
```

Equação da posição da frente de ablação:

```
> b4:=da=piecewise(t<rhs(a2),dao,rhs(a8));
```

Equação da distribuição da temperatura interna durante o período pré-ablativo:

```
> a10:=subs(e225,subs({a4,da=dao},subs(e213,e211)));
```

Equação da distribuição completa da temperatura interna durante o período pré-ablativo:

```
> b6:=T=piecewise(x<rhs(a4),rhs(a10),To);
```

Equação da distribuição da temperatura interna durante o período ablativo:

```
> a12:=subs({a6,a8},e221);
```

Equação da distribuição completa da temperatura interna durante o período ablativo:

```
> b8:=T=piecewise(x<=rhs(a8),Ta,x>rhs(a8) and  
x<rhs(a6),rhs(a12),To);
```

Equação da distribuição completa da temperatura interna:

```
> b10:=T=piecewise(t<rhs(a2),rhs(b6),rhs(b8));
```

Geração de gráficos:

```
> # Gráficos
```

Geração de gráficos da equação da posição da frente de penetração do calor com grau (n) de 0 a 10 e no período de 0 a 4 s.:

```
>
Pp:=plot3d(rhs(b2),n=0..10,t=0..4,axes=boxed,shading=zhue)
:
```

Geração de gráficos da equação da posição da frente de ablação com grau (n) de 0 a 10 e no período de 0 a 4 s.:

```
>
Pa:=plot3d(rhs(b4),n=0..10,t=0..4,axes=boxed,shading=zhue)
:
```

Apresentação de gráficos da equação da posição da frente de penetração do calor e da posição da frente de ablação com grau (n) de 0 a 10 e no período de 0 a 4 s.:

```
> display(Pp); display(Pa);
```

Determinação do grau n_f , do instante t_f e cálculo da posição x_f , que indica a posição da frente de penetração do calor para o instante t_f com o grau n_f :

```
> nf:=10;t_f:=4;x_f:=evalf(subs({t=t_f,n=n_f},rhs(b2)));
```

Geração de gráficos da equação da distribuição completa da temperatura interna no intervalo de 0 a x_f em x e no período de 0 a t_f em t com grau (n) igual a n_f :

```
>
PT:=plot3d(subs(n=n_f,rhs(b10)),x=0..x_f,t=0..t_f,axes=boxed,
shading=zhue):
```

Apresentação de gráficos da equação da distribuição completa da temperatura interna no intervalo de 0 a x_f em x e no período de 0 a t_f em t:

```
> display(PT);
```

ANEXO 1 – Informações sobre a função Lambert W