

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Walber Ferreira Braga

**NOVA ABORDAGEM DO MÉTODO DO BALANÇO  
INTEGRAL: APLICAÇÃO A PROBLEMAS INVERSOS DE  
CONDUÇÃO DE CALOR**

Tese submetida ao Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Mecânica  
da Universidade Federal de Santa  
Catarina para a obtenção do Grau de  
Doutor em Engenharia Mecânica  
Orientador: Prof<sup>º</sup>. Marcia Barbosa  
Henriques Mantelli, Ph. D.

Florianópolis

2011



Catálogo na fonte elaborada pela biblioteca da  
Universidade Federal de Santa Catarina

A ficha catalográfica é confeccionada pela Biblioteca Central.

Tamanho: 7cm x 12 cm

Fonte: Times New Roman 9,5

Maiores informações em:

<http://www.bu.ufsc.br/design/Catalogacao.html>



Walber Ferreira Braga

**NOVA ABORDAGEM DO MÉTODO DO BALANÇO  
INTEGRAL: APLICAÇÃO A PROBLEMAS INVERSOS DE  
CONDUÇÃO DE CALOR**

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de  
“Doutor em Engenharia”, e aprovada em sua forma final pelo Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Florianópolis, 22 de Fevereiro de 2011.

\_\_\_\_\_  
Prof. Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.  
Chefe do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**Banca Examinadora:**

\_\_\_\_\_  
Prof.<sup>a</sup> Marcia Barbosa Henriques Mantelli, Ph. D.  
Orientadora  
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

\_\_\_\_\_  
Prof. Antônio José da Silva Neto, Ph. D.  
Relator  
Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ)

\_\_\_\_\_  
Prof. Edson Luiz Zapparoli, D. C.  
Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA)

\_\_\_\_\_  
Prof. Álvaro Toubes Prata, Ph. D.  
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

\_\_\_\_\_  
Prof. Jader Riso Barbosa Júnior, Ph. D.  
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)



A Deus,  
Aos meus pais,  
À minha esposa Carolina,  
Aos meus filhos, Sofia e Vinícius.  
Palavras não são o suficiente.





## AGRADECIMENTOS

À Deus, pela graça da vida.

Aos meus pais, Anastácio e Maximiliana, pelo amor, apoio e por não deixarem de acreditar.

À minha companheira Carolina que batalhou comigo todo esse percurso, com amor e carinho, e sem a qual nada disso teria sentido.

Aos meus filhos, Sofia e Vinícius, que me ensinaram amar incondicionalmente.

Aos meus sogros, Jorge e Samara, pelo apoio fundamental em muitos momentos da jornada.

Aos meus irmãos, Patrícia e Alexandre, pela amizade sempre.

À minha orientadora e amiga, Marcia Barbosa Henriques Mantelli que, indo além do seu papel de orientadora, pela orientação e aconselhamentos ajudou a construir muito mais do que está apresentado aqui.

Aos colegas do LEPTEN e, em especial do LABTUCAL, por um convívio de muito aprendizado pessoal e tecnológico.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSC pelas oportunidades de crescimento que superam o escopo deste trabalho.

Aos professores que encontrei ao longo do curso, pelos ensinamentos, que foram muito além das questões técnicas.

Aos colegas de curso, pelas conversas sob os mais diversos assuntos que ajudaram, sob diversos aspectos, o avanço e desdobramentos deste trabalho.

Aos amigos simplesmente por existirem.

Ao CNPq e a CAPES pelo apoio e suporte financeiro ao desenvolvimento deste trabalho.



*The ability to analyze a problem involves a combination of inherent insight and experience. The former, unfortunately, cannot be learned, but depends on the individual. However, the latter is of equal importance, and can be gained with **patient study**.*

(Vendat S. Apaci, 1966)



## RESUMO

O presente trabalho apresenta o método do balanço integral do calor como uma alternativa interessante para a solução de problemas da condução de calor transiente. Embora o método seja, em sua essência, aproximado, a escolha de parâmetros corretos permite a sua aplicação em problemas de engenharia diversos, uma vez que apresentam a mesma ordem de grandeza de precisão que os métodos clássicos, porém maior facilidade de implementação computacional e maior velocidade de processamento. Desta forma, estes métodos analíticos podem ser empregados com vantagens para a solução de problemas diversos na engenharia, como os problemas inversos, onde técnicas numéricas são usualmente utilizadas.

Assim, neste trabalho é desenvolvido um conjunto de soluções inéditas do problema de condução de calor unidimensional a partir do método do balanço integral do calor, o qual foi modificado e teve seus parâmetros devidamente ajustados. Estas soluções são comparadas favoravelmente com soluções clássicas. Uma dessas soluções é utilizada como solução direta em um problema de condução de calor inverso em um problema teórico selecionado obtendo bons resultados.

**Palavras-chave:** Condução de Calor. Método Integral. Problema Inverso.



## **ABSTRACT**

This paper presents the heat balance method as an interesting alternative for transient heat conduction problem solving. Although the method is, in its essence, approximate, the correct choice of parameters allows its application in a wide range of engineering problems, since they have the same precision order of magnitude as conventional methods, but easier computational implementation and faster processing speed. Thus, these analytical methods can be used with advantage, when solving several engineering problems, such as inverse problems, where numerical techniques are usually applied.

In this work, a group of new solutions for the one-dimensional heat conduction problem is developed from the heat balance method, which was modified, and its parameters were adjusted accordingly. These solutions are compared favorably with conventional solutions. One of these solutions is used as a direct solution for an inverse heat conduction problem in a selected theoretical problem, obtaining good results.

**Keywords** : Heat Conduction. Integral Method. Inverse Problems.





## LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1 – Faixas de condutividade térmica de várias substâncias em temperaturas e pressões usuais. (Kakaç, 1993) .....	14
Figura 2-2 – Variação da condutividade térmica de diversas substâncias com a temperatura. (Kakaç, 1993) .....	14
Figura 2-3 – Balanço de energia em um volume de controle elementar.....	15
Figura 3-1 – Esquema do modelo físico de condução de calor.....	43
Figura 3-2 – Representação gráfico do perfil de temperatura arbitrado para o HBIM.....	104
Figura 4-1 – Análise do erro relativo do refino de malha para a solução por Volumes Finitos em função do tempo (s).....	128
Figura 4-2 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (– VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de temperatura prescrita à esquerda e temperatura prescrita à direita.....	130
Figura 4-3 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (– VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de temperatura prescrita à esquerda e fluxo prescrito à direita.....	131
Figura 4-4 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (– VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de temperatura prescrita à esquerda e convecção à direita.....	132
Figura 4-5 – Análise do erro RMS das soluções (LTL, LTC e HBM) em comparação a de VF para as condições de temperatura prescrita à esquerda e (1 - temperatura prescrita, 2 - fluxo prescrito e 3 - convecção) à direita.....	133
Figura 4-6 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (– VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de temperatura prescrita com variação linear à esquerda e temperatura prescrita à direita.....	138
Figura 4-7 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos.....	139
Figura 4-8 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (– VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de temperatura prescrita com variação linear à esquerda e convecção à direita.....	140
Figura 4-9 – Análise do erro RMS das soluções (LTL, LTC e HBM) em comparação a de VF para as condições de temperatura prescrita com variação linear à esquerda e (1 - temperatura prescrita, 2 - fluxo prescrito e 3 - convecção) à direita.....	141
Figura 4-10 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,05) pelos diversos métodos (– VF; ○ LTL; ◇ LTC; ×	

HBIM) para as condições de pulso de temperatura prescrita à esquerda e temperatura prescrita à direita.....	145
Figura 4-11 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,05 ) pelos diversos métodos ( – VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de pulso de temperatura prescrita à esquerda e fluxo prescrito à direita.....	146
Figura 4-12 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,05 ) pelos diversos métodos ( – VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de pulso de temperatura prescrita à esquerda e convecção à direita.....	147
Figura 4-13 – Análise do erro RMS das soluções (LTL, LTC e HBM) em comparação a de VF para as condições de pulso de temperatura prescrita à esquerda e (1 - temperatura prescrita, 2 - fluxo prescrito e 3 - convecção) à direita.....	148
Figura 5-1 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo $10\tau 1.3$ para as posições ( $x = 0.1$ – vermelho, $x = 0.2$ – azul e $x = 0.3$ – preto).....	157
Figura 5-2 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo $10\tau 1.3$ (vermelho) e a temperatura do modelo direto com os valores iniciais dos parâmetros (preto), ambas para as posições para as posições $x = 0.1$ e $x = 0.2$ .....	158
Figura 5-3 – Histórico do valor numérico dos parâmetros $P_1$ e $P_2$ em função do número de iterações.....	158
Figura 5-4 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido a condição de fluxo $10\tau 1.3$ (vermelho e azul) e a temperatura do modelo direto com os valores finais dos parâmetros (preto) para as posições $x = 0.1$ , $x = 0.2$ e $x = 0.3$ .....	159
Figura 5-5 – Elipse de confiabilidade de 95% e 99% entre os parâmetros $P_1$ e $P_2$ .....	159
Figura 5-6 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo $10\tau 1.3$ com ruído normal de desvio padrão de 0.02 para as posições $x = 0.1$ (vermelho), $x = 0.2$ (azul) e $x = 0.3$ (preto).....	160
Figura 5-7 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo $10\tau 1.3$ com ruído normal de desvio padrão de 0.02 (vermelho) e a temperatura do modelo direto com os valores iniciais dos parâmetros (preto), ambas para as posições $x = 0.1$ e $x = 0.2$ .....	161
Figura 5-8 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido a condição de fluxo $10\tau 1.3$ com ruído normal de desvio padrão de 0.02 (vermelho e azul) e a temperatura do modelo direto com os valores finais dos parâmetros (preto) para as posições $x = 0.1$ e $x = 0.2$ e $x = 0.3$ .....	162
Figura 5-9 – Elipse de confiabilidade de 99% e 95% entre os parâmetros $P_1$ e $P_2$ .....	162

Figura 5-10 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo pulso unitário para as posições $x = 0.1$ (vermelho), $x = 0.2$ (azul) e $x = 0.3$ (preto).....	164
Figura 5-11 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo pulso unitário (vermelho) e a temperatura do modelo direto com os valores iniciais dos parâmetros (preto), ambas para as posições $x = 0.1$ e $x = 0.2$ (Teste de 4 parâmetros).....	164
Figura 5-12 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo pulso unitário (vermelho) e a temperatura do modelo direto com os valores iniciais dos parâmetros (preto), ambas para as posições $x = 0.1$ e $x = 0.2$ (Teste de 5 parâmetros).....	165
Figura 5-13 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito e difusividade adimensional 1 submetido à condição de fluxo pulso unitário (vermelho) e a temperatura do modelo direto com os valores iniciais dos parâmetros (preto), ambas para as posições $x = 0.1$ e $x = 0.2$ (Teste de 6 parâmetros).....	165
Figura 5-14 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido a condição de fluxo pulso unitário (vermelho e azul) e a temperatura do modelo direto com os valores finais dos parâmetros (preto) para as posições $x = 0.1$ , $x = 0.2$ e $x = 0.3$ (Teste 4 parâmetros).....	166
Figura 5-15 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido a condição de fluxo pulso unitário (vermelho e azul) e a temperatura do modelo direto com os valores finais dos parâmetros (preto) para as posições $x = 0.1$ , $x = 0.2$ e $x = 0.3$ (Teste 5 parâmetros).....	166
Figura 5-16 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito e difusividade adimensional 1 submetido a condição de fluxo pulso unitário (vermelho e azul) e a temperatura do modelo direto com os valores finais dos parâmetros (preto) para as posições $x = 0.1$ , $x = 0.2$ e $x = 0.3$ (Teste 6 parâmetros).....	167
Figura 5-17 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo pulso unitário com ruído normal de desvio padrão de 0.02 para as posições $x = 0.1$ (vermelho), $x = 0.2$ (azul) e $x = 0.3$ (preto).....	168
Figura 5-18 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo pulso unitário com ruído normal de desvio padrão de 0.02 (vermelho) e a temperatura do modelo direto com os valores iniciais dos parâmetros (preto), ambas para as posições $x = 0.1$ e $x = 0.2$ (Teste 4 parâmetros).....	169
Figura 5-19 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo pulso unitário com ruído normal de desvio padrão de 0.02 (vermelho) e a temperatura do modelo	

direto com os valores iniciais dos parâmetros (preto), ambas para as posições $x = 0.1$ e $x = 0.2$ (Teste 5 parâmetros).....	169
Figura 5-20 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito e difusividade adimensional 1.3 submetido à condição de fluxo pulso unitário com ruído normal de desvio padrão de 0.02 (vermelho) e a temperatura do modelo direto com os valores iniciais dos parâmetros (preto), ambas para as posições $x = 0.1$ e $x = 0.2$ (Teste 6 parâmetros).....	170
Figura 5-21 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido a condição de fluxo pulso unitário com ruído normal de desvio padrão de 0.02 (vermelho e azul) e a temperatura do modelo direto com os valores finais dos parâmetros (preto) para as posições $x = 0.1$ , $x = 0.2$ e $x = 0.3$ (Teste 4 parâmetros).....	171
Figura 5-22 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido a condição de fluxo pulso unitário com ruído normal de desvio padrão de 0.02 (vermelho e azul) e a temperatura do modelo direto com os valores finais dos parâmetros (preto) para as posições $x = 0.1$ , $x = 0.2$ e $x = 0.3$ (Teste 5 parâmetros).....	171
Figura 5-23 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito e difusividade adimensional 1 submetido a condição de fluxo pulso unitário com ruído normal de desvio padrão de 0.02 (vermelho e azul) e a temperatura do modelo direto com os valores finais dos parâmetros (preto) para as posições $x = 0.1$ , $x = 0.2$ e $x = 0.3$ (Teste 6 parâmetros).....	172

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2-1 – Composição das condições de contorno a partir da condição Global.....	19
Tabela 2-2 – Composição adimensional das condições de contorno a partir da condição Global.....	22
Tabela 2-3 – Propriedades da Transformada de Laplace .....	31
Tabela 3-1 – Relação das condições de contorno e solução em regime permanente.....	79
Tabela 4-1 – Condições de contorno das superfícies.....	127
Tabela 4-2 – Tempo de processamento utilizado na situação $m=0$ (s) .....	137
Tabela 4-3 – Tempo de processamento utilizado na situação $m=1$ (s) .....	143
Tabela 4-4 – Tempo de processamento utilizado na situação pulso (s).....	150
Tabela 5-1 – Valores exatos, iniciais e finais para os parâmetros calculados testes sem ruído.....	163
Tabela 5-2 – Valores exatos, iniciais e finais para os parâmetros calculados testes com ruído .....	168



## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

- HBIM – Método do Balanço Integral do Calor  
(Heat Balance Integral Method)
- LTC – Solução por Laplace no regime de tempo curto
- LTL – Solução por Laplace no regime de tempo longo
- MMQ – Método de Mínimos Quadrados
- VF – Solução por Volumes Finitos





## LISTA DE SÍMBOLOS

$B_A$	Constante indicativa da influência da temperatura na condição de contorno na superfície A [-]
$B_B$	Constante indicativa da influência da temperatura na condição de contorno na superfície B [-]
$Bi$	Número de Biot [-]
$c_p$	Capacidade calorífica a pressão constante [J/kg K]
$f_A$	Termo fonte da condição de contorno na superfície A [-]
$f_0$	Coefficiente da expressão de distribuição do termo fonte para a condição de contorno [-]
$h$	Coefficiente de convecção [W/m <sup>2</sup> K]
$k$	Condutividade térmica [W/m K]
$K_A$	Constante indicativa da influência da derivada da temperatura na condição de contorno na superfície A [-]
$K_B$	Constante indicativa da influência da derivada da temperatura na condição de contorno na superfície B [-]
$L$	Comprimento característico [m]
$m$	Grau da expressão de distribuição do termo fonte para a condição de contorno [-]
$n$	Grau da expressão de distribuição de temperatura para o Método do Blanco Integral do Calor [-]
$q''$	Fluxo de calor [W/m <sup>2</sup> ]
$q''_P$	Fluxo de calor prescrito [W/m <sup>2</sup> ]
$Q$	Fluxo de calor adimensional [-] ou Função objetivo do Método de Mínimos Quadrados
$Q_A$	Fluxo de calor prescrito adimensional incidente na superfície A [-]
$Q_q$	Fluxo de calor adimensional baseado em fluxo [-]
$Q_T$	Fluxo de calor adimensional baseado em temperatura [-]
$t$	Tempo [s]
$t_o$	Instante no qual a posição de penetração do calor se iguala a posição da superfície B [s]
$T$	Temperatura [K]
$T_0$	Temperatura inicial [K]
$T_P$	Temperatura prescrita [K]
$u$	Comprimento adimensional de penetração do calor [-]
$U$	Comprimento da frente de penetração do calor [m]
$x$	Posição (Dimensional [m] ou Adimensional [-])
$y$	Posição (Dimensional [m] ou Adimensional [-])

$\lambda_m$	Autovalor associado à solução transiente para a solução por Separação de Variáveis [-]
$\lambda_n$	Autovalor associado à transformação de Laplace na solução de tempo longo
$\varphi_0$	Coefficiente de ajuste 0 do perfil de temperatura adimensional no Método de Balanço Integral do Calor.
$\varphi_1$	Coefficiente de ajuste 1 do perfil de temperatura adimensional no Método de Balanço Integral do Calor.
$\varphi_2$	Coefficiente de ajuste 2 do perfil de temperatura adimensional no Método de Balanço Integral do Calor.
$\varphi_3$	Coefficiente de ajuste 3 do perfil de temperatura adimensional no Método de Balanço Integral do Calor.
$\rho$	Densidade [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	Desvio padrão
$\alpha$	Difusividade térmica [m <sup>2</sup> /s]
$\delta_A$	Posição adimensional da superfície A [-]
$\delta_B$	Posição adimensional da superfície B [-]
$\Delta$	Posição da frente de penetração do calor [m]
$\Delta_A$	Posição da superfície A [m]
$\Delta_B$	Posição da superfície B [m]
$\theta$	Temperatura adimensional [-]
$\theta_q$	Temperatura adimensional baseada em fluxo de calor [-]
$\theta_T$	Temperatura adimensional baseada em temperatura [-]
$\theta_K$	Temperatura adimensional baseada na condutividade [-]
$\theta_\infty$	Temperatura adimensional do meio extenso
$\theta_{rp}$	Temperatura adimensional em regime permanente [-]
$\theta_{tr}$	Temperatura adimensional em regime transiente [-]
$\bar{\theta}$	Temperatura adimensional no plano transformado de Laplace [-]
$\theta_A$	Temperatura prescrita adimensional incidente na superfície A [-]
$\tau$	Tempo adimensional de Fourier [-]

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 CONTRIBUIÇÕES PRINCIPAIS	2
1.2 CONTRIBUIÇÕES SECUNDÁRIAS	2
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	3
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>5</b>
2.1 HISTÓRICO DA CONDUÇÃO DE CALOR	5
2.2 FÍSICA DA CONDUÇÃO DE CALOR	11
2.3 MATEMÁTICA DA CONDUÇÃO DE CALOR	15
<b>2.3.1 Condições de contorno</b>	<b>16</b>
2.3.1.1 Temperatura prescrita	17
2.3.1.2 Fluxo prescrito	17
2.3.1.3 Convecção	18
2.3.1.4 Global	18
<b>2.3.2 Adimensionalização</b>	<b>19</b>
2.3.2.1 Temperatura	19
2.3.2.2 Fluxo	20
2.3.2.3 Posição	20
2.3.2.4 Tempo	21
2.3.2.5 Biot	21
2.3.2.6 Equação de calor	21
2.3.2.7 Condição de contorno	22
2.4 TÉCNICAS DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA DIRETO	22
<b>2.4.1 Método de separação de variáveis</b>	<b>25</b>
<b>2.4.2 Transformada de Laplace</b>	<b>28</b>
<b>2.4.3 Método das Imagens</b>	<b>32</b>
<b>2.4.4 Método do Balanço Integral do Calor</b>	<b>33</b>
2.5 TÉCNICAS DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO	36
<b>2.5.1 Método dos Mínimos Quadrados</b>	<b>37</b>
<b>2.5.2 Método de Levenberg-Marquardt</b>	<b>39</b>
<b>2.5.3 Método do Gradiente Conjugado</b>	<b>39</b>
<b>2.5.4 Método do Gradiente Conjugado com Problema de Apoio</b>	<b>40</b>

<b>2.5.5 Método do Gradiente Conjugado com Problema de Apoio para Estimativa de Função</b>	<b>40</b>
<b>3 MODELAGEM E DESENVOLVIMENTO DE SOLUÇÕES</b>	<b>41</b>
3.1 MODELO FÍSICO	41
3.2 MODELO MATEMÁTICO	42
3.3 TRANSFORMADA DE LAPLACE	44
<b>3.3.1 Sólido Semi-Infinito</b>	<b>44</b>
3.3.1.1 Temperatura Prescrita	46
3.3.1.2 Fluxo Prescrito	46
3.3.1.3 Convecção	47
<b>3.3.2 Sólido Finito</b>	<b>47</b>
3.3.2.1 Solução de tempo longo	49
3.3.2.1.1 <i>Temperatura Prescrita/Temperatura Prescrita:</i>	55
3.3.2.1.2 <i>Temperatura Prescrita/Fluxo Prescrito:</i>	55
3.3.2.1.3 <i>Temperatura Prescrita/Convecção:</i>	56
3.3.2.1.4 <i>Fluxo Prescrito/Temperatura Prescrita:</i>	56
3.3.2.1.5 <i>Fluxo Prescrito/Fluxo Prescrito:</i>	57
3.3.2.1.6 <i>Fluxo Prescrito/Convecção:</i>	57
3.3.2.1.7 <i>Convecção/Temperatura Prescrita:</i>	58
3.3.2.1.8 <i>Convecção/Fluxo Prescrito:</i>	58
3.3.2.1.9 <i>Convecção/Convecção:</i>	59
3.3.2.2 Solução de tempo curto	59
3.3.2.2.1 <i>Temperatura Prescrita/Temperatura Prescrita:</i>	62
3.3.2.2.2 <i>Temperatura Prescrita/Fluxo Prescrito:</i>	63
3.3.2.2.3 <i>Temperatura Prescrita/Convecção:</i>	63
3.3.2.2.4 <i>Fluxo Prescrito/Temperatura Prescrita:</i>	65
3.3.2.2.5 <i>Fluxo Prescrito/Fluxo Prescrito:</i>	66
3.3.2.2.6 <i>Fluxo Prescrito/Convecção:</i>	67
3.3.2.2.7 <i>Convecção/Temperatura Prescrita:</i>	68
3.3.2.2.8 <i>Convecção/Fluxo Prescrito:</i>	71
3.3.2.2.9 <i>Convecção/Convecção:</i>	73
3.4 SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS	75
<b>3.4.1 Sólido Finito</b>	<b>75</b>
3.4.1.1 Regime Permanente	75
3.4.1.2 Regime Transiente	78
3.4.1.3 Solução completa	86
3.4.1.3.1 <i>Temperatura Prescrita/Temperatura Prescrita:</i>	86
3.4.1.3.2 <i>Temperatura Prescrita/Fluxo Prescrito:</i>	87
3.4.1.3.3 <i>Temperatura Prescrita/Convecção:</i>	88
3.4.1.3.4 <i>Fluxo Prescrito/Temperatura Prescrita:</i>	90

3.4.1.3.5 Fluxo Prescrito/Fluxo Prescrito:	91
3.4.1.3.6 Fluxo Prescrito/Convecção:	93
3.4.1.3.7 Convecção/Temperatura Prescrita:	94
3.4.1.3.8 Convecção/Fluxo Prescrito:	95
3.4.1.3.9 Convecção/Convecção:	97
3.4.1.4 Solução com condição de contorno transiente	98
3.4.1.5 Sólido Semi-Infinito	101
3.5 BALANÇO INTEGRAL DO CALOR	103
<b>3.5.1 Montagem da Equação Geral</b>	<b>103</b>
<b>3.5.2 Sólido Semi-Infinito</b>	<b>107</b>
3.5.2.1 Temperatura Prescrita:	108
3.5.2.2 Fluxo Prescrito:	110
3.5.2.3 Convecção:	111
<b>3.5.3 Sólido Finito</b>	<b>115</b>
3.5.3.1 Temperatura Prescrita/Temperatura Prescrita:	117
3.5.3.2 Temperatura Prescrita/Fluxo Prescrito:	118
3.5.3.3 Temperatura Prescrita/Convecção:	118
3.5.3.4 Fluxo Prescrito/Temperatura Prescrita:	119
3.5.3.5 Fluxo Prescrito/Fluxo Prescrito:	120
3.5.3.6 Fluxo Prescrito/Convecção:	121
3.5.3.7 Convecção/Temperatura Prescrita:	121
3.5.3.8 Convecção/Fluxo Prescrito:	122
3.5.3.9 Convecção/Convecção:	123
<b>4 ANÁLISE DE RESULTADOS</b>	<b>125</b>
4.1 SOLUÇÃO DE REFERÊNCIA: VOLUMES FINITOS	126
4.2 CASO 1 – CONDIÇÕES INDEPENDENTES DO TEMPO	126
4.3 CASO 2 – CONDIÇÕES COM DEPENDÊNCIA LINEAR AO TEMPO	137
4.4 CASO 3 – CONDIÇÕES DE PULSO NO TEMPO	143
4.5 CONCLUSÕES	150
<b>5 MÉTODO INVERSO</b>	<b>153</b>
5.1 DESENVOLVIMENTO DO ALGORITMO DE SOLUÇÃO INVERSA	153
5.2 TESTES DO ALGORITMO IMPLEMENTADO	156
5.3 CONCLUSÕES	170
<b>6 CONCLUSÕES</b>	<b>175</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>179</b>



# 1 INTRODUÇÃO

A condução de calor é um fenômeno muito importante para todas as engenharias de um modo geral, especialmente devido ao amplo espectro de aplicações que essa área do conhecimento acaba por abordar. Devido ao interesse prático do assunto, este vem sendo estudado há muito tempo, especialmente no que diz respeito aos métodos matemáticos que têm sido desenvolvidos para ajudar a entender e a prever o comportamento térmico de diferentes materiais.

Dentre esses métodos, alguns, devido à capacidade comprovada de uso, são considerados clássicos e podem ser facilmente encontrados em diversos livros-texto como, por exemplo, Carslaw e Jaeger (1959) e Özisik (1993). Alguns desses métodos clássicos são considerados exatos, tais como separação de variáveis e transformada de Laplace, onde se soluciona a equação diferencial parcial que modela o fenômeno; enquanto outros, como as técnicas variacionais e os métodos integrais, são considerados aproximados, por apresentarem uma diferença em relação a solução exata esperada. Entretanto, os métodos aproximados se apresentam como ferramentas essenciais para a engenharia por serem, na maioria das vezes, mais simples e mais rápidos do que os exatos. Além disso, os erros existentes nas soluções aproximadas muitas vezes se encontram dentro das possibilidades das aplicações em engenharia.

O Laboratório de Tubos de Calor (Labtucal) vem atuando há muitos anos em pesquisa e desenvolvimento de projetos de soluções de engenharia térmica e, muitas vezes, necessita recorrer ao desenvolvimento de modelos matemáticos para fins específicos, bem como se utilizar de métodos aproximados para obtenção de soluções rápidas. O Método do Balanço Integral do Calor (Heat Balance Integral Method), chamado de HBIM de agora em diante, foi empregado como técnica aproximada por diversas vezes. Na presente tese, foram parcialmente preenchidas lacunas da literatura dentro do espectro de possíveis combinações de condições de contorno para o problema básico de condução de calor unidimensional, tanto na situação de sólido semi-infinito quanto na de sólido finito.

Assim, o objetivo principal da presente tese é fornecer um conjunto de soluções inéditas para o problema de condução de calor unidimensional, baseado em um aprimoramento do HBIM, onde as condições de contorno possuam variação temporal.

Para comparação com as soluções desenvolvidas, foram obtidas soluções utilizando-se as técnicas de separação de variáveis e de transformação de Laplace também com condições de contorno variáveis

no tempo. Essas soluções são consideradas contribuições originais ao estado da arte pois na literatura (Carslaw & Jaeger, 1959; Arpaci, 1966; Luikov, 1968; Ozisik, 1993).

Uma vez checada a acurácia das soluções HBIM desenvolvidas, uma delas é utilizada pela primeira vez na literatura, para uma aplicação de condução de calor inversa.

Métodos diretos adequados para aplicações em engenharia e em problemas inversos devem ser precisos, simples de serem implementados e consumir pequeno tempo de processamento computacional. A solução de problemas de condução de calor unidimensionais a partir do HBIM atende a estas exigências.

Para fins de teste, foi desenvolvido e implementado um algoritmo baseado na solução por HBIM para, a partir de temperaturas geradas artificialmente, reconstruir as condições de contorno que originaram estas temperaturas.

## 1.1 CONTRIBUIÇÕES PRINCIPAIS

A principal contribuição deste trabalho é o desenvolvimento de um conjunto de novas soluções para o problema de condução de calor unidimensional através de um aprimoramento do HBIM. A partir desse novo conjunto de soluções, uma nova abordagem para o problema de condução de calor inverso é proposta e implementada para a solução de um caso teórico.

## 1.2 CONTRIBUIÇÕES SECUNDÁRIAS

Dentre as contribuições secundárias deste trabalho deve-se ressaltar uma nova visão global das soluções matemáticas obtidas pelos métodos analíticos, cujos parâmetros são descritos a partir de poucos grupos adimensionais, de forma que o conjunto das soluções de condução de calor unidimensional de um sólido sujeito a todas as combinações de condições de contorno resultam em um número reduzido de expressões matemáticas. Essa nova visão justifica os caminhos adotados no desenvolvimento do HBIM e mostra a conexão existente entre os diversos métodos que, usualmente, são tratados de forma isolada.



### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O documento está organizado em seis capítulos principais. O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre o tema condução de calor, descrevendo algumas das técnicas analíticas disponíveis na literatura usadas para a solução do problema direto e inverso. No Capítulo 3 são apresentadas a modelagem física e matemática adotada nesta tese bem como os desenvolvimentos das soluções para o problema direto através do uso de três métodos: Transformada de Laplace, Separação de Variáveis e o HBIM modificado, proposto no presente trabalho. No Capítulo 4 é feita uma análise comparativa entre as soluções obtidas pelos três métodos. Já no Capítulo 5, um problema direto é escolhido e empregado para a determinação dos fluxos de calor superficial de um problema teórico, demonstrando a robustez do HBIM na solução de problemas inversos. Finalmente, no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões do presente trabalho e sugestões para trabalhos futuros.



## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo será apresentada uma revisão bibliográfica dos diversos temas abordados no presente trabalho de tese. De uma maneira geral, estes temas podem ser divididos como: breve histórico da abordagem destes problemas, fenomenologia e métodos para a solução de problemas de condução de calor, tanto na sua forma direta quanto inversa.

### 2.1 HISTÓRICO DA CONDUÇÃO DE CALOR

Conforme Truesdell (1980) vários especialistas em termodinâmica já expressaram surpresa pelo fato de que a teoria de condução de calor, conforme apresentada por Fourier, só foi apresentada uma centena de anos após a teoria da elasticidade e cinquenta anos após a teoria da hidrodinâmica, sendo que estas últimas teorias apresentam maior complexidade e dificuldade de compreensão tanto pela sua natureza, quanto pelos conceitos envolvidos. Fourier (1822) deixa claro em seu trabalho, que o seu equacionamento da transferência de calor foi estabelecido baseado no modelo hidrodinâmico de Euler. Na realidade, a condução de calor não era reconhecida como modo de transferência de calor, até ser distinguida da radiação de calor pelas pesquisas experimentais de Ingen-Housz, Leslie e Rumford, todas datadas do final do século dezoito (Truesdell, 1980). O primeiro experimento quantitativo, realizado por Despretz, só foi publicado após o tratado de Fourier. Truesdell (1980) observa que, ao que parece, anteriormente ao trabalho de Fourier, os experimentalistas não tinham uma base clara para interpretar e apresentar suas observações.

O trabalho de Leslie, de acordo com Truesdell (1980), é particularmente confuso. Leslie apresenta sua interpretação sobre calor em um amontoado de cálculos difíceis, irrelevantes e inexplicáveis. A teoria de Leslie, bem como teorias anteriores sobre o calor, usa em seus desenvolvimentos entidades tais como vazios, vórtices ou, até em alguns casos, anjos. Essas teorias, ao que se entende hoje, não pertencem ao campo da física e devem ser levadas em consideração por seu aspecto histórico como filosofia especulativa.

Assim, Truesdell (1980) apresenta Lambert, Laplace e Fourier como os primeiros a publicarem algum tratamento matemático sobre o assunto, uma vez que estes foram os primeiros a tratar sobre calorimetria ou condução de calor de uma forma suficientemente sólida, de forma que pudesse ser confirmada ou refutada por experimentos. Destes, o

primeiro pesquisador a relatar uma tentativa de medição precisa da condução de calor foi Lambert em *Pyrimetrie* de 1779. Ele considerou uma barra longa sem isolamento, suspensa por finos fios, e com uma das extremidades sobre uma chama. No seu registro do experimento, Lambert escreveu, em termos modernos, que o calor se propagava dentro do material ao mesmo tempo em que era perdido para o ar. Além disto, se a chama fosse mantida por tempo suficientemente longo, toda a barra teria sido aquecida e somente uma quantidade de calor igual à perdida para o ar seria reposta. Mach, citado no trabalho de Truesdell (1980), comenta que a análise de Lambert não exhibe uma clara correspondência entre a matemática com a descrição física do problema. Além disso, Lambert relaciona o calor  $y$  como uma função apenas da posição  $x$  através da expressão:

$$dy: y = dx: F \quad (2.1)$$

Sem qualquer razão aparente, este autor assume  $F$  constante. A partir desta expressão, ele conclui que a  $y(x)$  pode ser representada por uma função logarítmica, i.e,

$$y(x) = y(0)e^{-x/F} \quad (2.2)$$

A partir destas observações, Lambert analisa os experimentos de Newton e de Amontons e não encontra grandes divergências entre os mesmos e o experimento realizado por ele mesmo. Essas comparações mostram que Lambert interpretou o calor  $y$  como sendo a temperatura e, a partir deste trabalho, a expressão logarítmica foi considerada boa para a descrição do problema de condução (Truesdell, 1980).

O próximo passo na evolução do estudo de condução, de acordo com Truesdell (1980), foi dado por Biot em 1804 que, em novos experimentos, reafirmou a característica logarítmica observada por Lambert do fenômeno de condução do calor. Biot, conforme reportado por Truesdell (1980), expressou em seu texto a condução de calor da seguinte forma:

“.. cada ponto da barra recebe algum calor do ponto que o antecede e entrega uma porção deste para o que o procede. A diferença é o que se armazena, que é proporcional a distância do ponto ao forno, e a sua perda para o ar se dá por contato com o fluido bem como por radiação.”

[T.A. - tradução livre do autor].

Com isso em mente, considerando-se o conhecimento existente no período, descreve-se que, no estado de equilíbrio quando a temperatura da barra se torna estável, o calor que cada ponto da barra recebe em virtude da sua posição é igual à quantidade que é perdida por convecção e radiação, uma perda proporcional a sua temperatura. Essa condição quando descrita em forma matemática se apresenta como uma equação diferencial de segunda ordem entre duas variáveis: o aumento da temperatura em cada ponto e a distância do ponto à fonte de calor constante. A equação é linear, com coeficientes constantes e poderia ser integrada pelos métodos conhecidos na época.

De maneira similar, no caso de regime transiente, quando a temperatura da barra se altera a cada instante, a quantidade de calor recebida em cada ponto devido a sua posição, menos a quantidade perdida por radiação e por contato com o ar, é igual à quantidade pela qual a temperatura varia no mesmo intervalo. Essa situação, na qual mais uma variável – tempo – se insere no problema, se apresenta matematicamente como uma equação diferencial parcial de segunda ordem que contém, implicitamente, a primeira equação.

Biot, de acordo com Truesdell (1980), partindo destes trabalhos, analisa apenas uma situação baseada no trabalho de Lambert. Essa análise o leva a escrever:

“A equação diferencial relatada aqui contém em sua integração duas constantes arbitrárias multiplicando duas exponenciais, e no interior da exponencial outra constante não arbitrária que depende da razão entre a condutividade e a radiação.” [T.A.].

Dessas passagens, acredita-se que Biot estivesse se referindo a equação em regime permanente no formato

$$\frac{K}{h} \frac{d^2\theta}{dx^2} = \theta \quad (2.3)$$

Onde  $K$  é a condutividade térmica,  $h$  é o coeficiente de calor radiativo e  $\theta$  é o acréscimo de temperatura. Equação que tem como solução

$$\theta = A \exp \left( -\sqrt{\frac{h}{K}} x \right) + B \exp \left( \sqrt{\frac{h}{K}} x \right) \quad (2.4)$$

Biot aparentemente resolveu o problema por si, mas não é encontrada, conforme Truesdell (1980), nenhuma referência de Biot que apresente o equacionamento do problema referido até uma publicação, 12 anos após essa primeira, em 1816. Em uma nota de rodapé desse último trabalho, Biot justifica-se por apresentar no primeiro trabalho apenas a estrutura da solução do problema sem o devido desenvolvimento por não estar satisfeito, na época, com o tratamento que havia dado à questão da homogeneidade. Este autor só ficou satisfeito quando adotou a hipótese de Laplace, que assume que um ponto particular é influenciado não somente por aqueles pontos em que mantém contato direto, mas também com uma pequena região ao seu redor, o que hoje chamamos de volume de controle. Na verdade a hipótese de Laplace pode ser entendida como um “novo” conceito de transferência de calor em relação ao pensamento da época calcado na lei de resfriamento de Newton, que tinha Biot como um dos defensores. O âmago da hipótese de Laplace é que a condução se dá não como resposta a diferenças de temperatura de um corpo seccionado em pedaços materiais, conforme a abordagem que era feita pelos seguidores da lei de resfriamento, mas sim a gradientes de temperatura existentes dentro de um corpo indivisível.

Truesdell (1980) observa que Biot não faz referência a quando Laplace teria revelado para ele a questão da homogeneidade. Se a data for anterior a 1804, então muito do crédito dado a Fourier pela análise física da teoria de calor deveria ser dividido com Laplace e Biot. De qualquer modo, Truesdell (1980) analisa que os trabalhos anteriores a 1808 de Fourier indicam que o mesmo deve ter tido acesso e se apropriado das equações de Biot sem um completo entendimento dos conceitos físicos nos quais as mesmas se baseavam. Entretanto, estranhamente, nem Laplace nem Biot fizeram novas publicações sobre condução de calor nos anos seguintes. Já Fourier publicou, em 1822, o famoso *Théorie analytique de la chaleur* cujos principais resultados já haviam sido apresentados a partir de 1808.

Truesdell (1980) ressalta que Fourier acredita que seus princípios básicos, apresentados no *Analytical*, não são apenas finais e exatos, mas também completos. Logo, para aplicar esses princípios em problemas específicos devem ser especificadas condições iniciais e de contornos

apropriadas, bem como usar-se valores corretos para condutividade e calor específico dos corpos envolvidos, sendo que os experimentos devem ser orientados para obtenção dessas condições e parâmetros.

Entretanto, conforme Truesdell (1980) apresenta, havia-se o costume, a mais de um século antes do trabalho de Fourier, de se calcular a velocidade de propagação de uma pequena perturbação e tentar comparar os valores calculados com os experimentais. De acordo com a teoria de Fourier, as diferenças de temperatura são instantaneamente difundidas por distâncias infinitas. Embora esse fato possa ser observado em várias soluções apresentadas por Fourier para casos específicos, ele não faz menção sobre isso, não há em seu texto qualquer menção de explicar ou justificar essa consequência, fisicamente implausível, da sua teoria. Atualmente essa característica é vista por alguns como uma falha maior ou mesmo como um paradoxo da teoria, mas, na verdade, essa é apenas uma limitação do modelo, como será mais detalhadamente explicado no final desta seção.

Mas, independente disso, é inegável a contribuição de Fourier para a área de condução de calor através do princípio da conservação do calor, que não é claramente exposto no seu texto embora seja muitas vezes utilizado. Fourier escreveu:

“...se no interior do sólido um elemento de qualquer forma é concebido, a quantidade de calor que penetra nesse poliedro através de suas faces compensa cada uma reciprocamente. Mais exatamente, o somatório dos termos de primeira ordem que entram na expressão dessas quantidades de calor recebidas pelo elemento é zero, portanto o calor que nele se acumula causa uma variação de temperatura que pode ser expressa apenas por termos infinitesimalmente menores que aqueles de primeira ordem.” [T.A.]

Esse trecho pode ser compreendido, matematicamente, pela expressão

$$Q = \int_V \rho C \frac{\partial \theta}{\partial t} dV \quad (2.5)$$

Onde  $Q$  é o calor,  $\rho$  é a densidade do corpo,  $\theta$  é o acréscimo de temperatura,  $C$  é a “capacidade específica de calor”, que mais

modernamente é chamado de calor específico e  $t$  representa o tempo. Conforme Truesdell (1980), Fourier entendia  $C$  como um parâmetro do material, o que seria considerado atualmente como um coeficiente constitutivo, e com exceção de uma única passagem, é considerado como constante em todo o trabalho de Fourier.

Para obter outra forma para a mesma expressão, Truesdell (1980) indica que Fourier calculou o balanço de fluxo de calor ao redor do elemento. Ele apresentou esse balanço em três diferentes situações, de formas muito similares em cada uma delas. O texto apresentado tem como equivalente matemático a expressão

$$Q = \int_V \operatorname{div}(K \operatorname{grad} \theta) dV \quad (2.6)$$

onde  $K$  é a “condutividade específica” do corpo, ou mais modernamente apenas condutividade. Comparando-se as duas expressões tem-se a formulação comumente conhecida na literatura

$$\rho C \frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div}(K \operatorname{grad} \theta) \quad (2.7)$$

Para a obtenção de uma solução da equação diferencial apresentada é necessária a condição de contorno que Fourier expressa de uma forma geral como sendo

$$K n \cdot \operatorname{grad} \theta + h(\theta - \theta_a) = 0 \quad (2.8)$$

onde  $n$  é o vetor normal unitário com orientação para fora do volume delimitado pela superfície de contorno,  $\theta_a$  é a temperatura do ar ambiente ao corpo e  $h$  é denominado por Fourier como “condutividade superficial” do corpo no ambiente em específico. Mais modernamente o  $h$  é chamado de coeficiente de troca convectiva, mas na época de Fourier o fenômeno de convecção não era, ainda, dissociado da radiação.

Assim, a formulação final de Fourier necessita de três coeficientes materiais para representar os mais variados materiais, superfícies de contorno e ambientes:  $\rho C$ ,  $K$  e  $h$ . Eles eram, conforme Fourier:



“magnitudes cuja variação dependem da temperatura e estado do corpo. Entretanto, em aplicações de questões naturais de grande interesse, esses coeficientes podem ser considerados constantes.” [T.A.]

O restante do Analytical trata de questões de pura análise no que diz respeito à solução do problema posto de condução com o uso da técnica de separação de variáveis que será apresentado a posteriori. Então, a partir do que foi apresentado por Fourier, durante muito tempo pouco foi feito no que diz respeito da teoria de condução de calor embora muito trabalho tenha sido feito para um melhor entendimento das formas de transmissão do calor em níveis microscópico e eletrônico e, conseqüentemente, na obtenção dos valores mais apropriados para os coeficientes propostos por Fourier.

Somente com o advento do laser, das nanotecnologias e com uma maior sofisticação dos equipamentos de medição é que os pesquisadores puderam questionar o paradoxo da teoria de Fourier a partir de dados experimentais. Isto porque, embora a teoria funcione muito bem com a grande maioria dos problemas usualmente encontrados na área térmica, ela começa a apresentar discordâncias com os resultados dos experimentos que envolvam tempos muito pequenos, altos gradientes ou temperaturas próximas ao zero absoluto. Özisik e Tzou (1994) reportam que isso se deve ao fato de que, nestas condições, o tempo necessário para que o sistema observado chegue ao equilíbrio termodinâmico é maior que o tempo de observação dos fenômenos de interesse. Assim, Özisik e Tzou (1994) indicam que a lei de Fourier apresenta maiores discrepâncias em comparação a resultados experimentais para as situações que se afastem da condição de equilíbrio termodinâmico local instantâneo. Para essa classe de problemas, Wang et al. (2008) apresenta que algumas adaptações a teoria de Fourier foram propostas das quais as de Cattaneo e de Vernotte, ambas de 1958, são as mais aceitas, mas não as únicas. Hoje, o desenvolvimento dos modelos chamados não-Fourier se apresenta como a fronteira do conhecimento de condução de calor no mundo.

## 2.2 FÍSICA DA CONDUÇÃO DE CALOR

Fisicamente a condução de calor pode ser definida como a transferência do calor de uma parte de um corpo com temperatura mais elevada para outra parte do mesmo corpo a uma temperatura mais baixa.

Esse mecanismo, que ocorre no nível molecular, envolve vários fenômenos que são determinados, em especial, pelo estado físico e estrutura do meio analisado.

A condução de calor em gases e vapores depende principalmente da transferência molecular da energia cinética presente na quantidade de movimento da molécula. Isto é, a condução de calor nesses casos é a transmissão da energia cinética das moléculas mais ativas, localizadas nas regiões de alta temperatura, para moléculas em regiões de menor energia cinética, através de sucessivas colisões. De acordo com a teoria cinética dos gases, a temperatura de um elemento de gás é proporcional a energia cinética média das suas moléculas constituintes. Claramente, quanto mais rápido as moléculas se movem, mais rapidamente vão transferir energia. Em líquidos, as moléculas estão espacialmente mais próximas do que nos gases e então o campo de força molecular exerce uma grande influência na troca de energia durante as colisões moleculares. Devido a isso, os líquidos conduzem melhor o calor do que os gases.

Materiais sólidos podem ter estruturas cristalinas (tal como o quartzo), podem estar em estado sólido amorfo (tal como o vidro), podem apresentar como estrutura uma a mistura das duas estruturas ou pode ter uma estrutura porosa, onde ar ou outros gases se alojam em seus poros.

No caso de sólidos cristalinos, em especial o cristalino metálico, a teoria eletrônica prova que o calor é conduzido por dois mecanismos. São eles: a vibração da rede (*lattice*), cujos pacotes de energia são chamados de *phonons*, e o movimento de condução eletrônica (ou por elétrons). Os dois mecanismos ocorrem de maneira paralela e são praticamente independentes. Desta forma as suas contribuições para a condução de calor podem ser somadas. De maneira geral, nos metais, o termo eletrônico domina e a capacidade de condução é limitada pelo processo de dispersão de *phonons* e elétrons. Essa dispersão ocorre devido às interações *phonon-phonon* e elétron-*phonon*. Alguma dispersão também ocorre nas fronteiras do cristal, em falhas da estrutura cristalina (por exemplo, um deslocamento da estrutura) e átomos incrustados na rede, tais como impurezas e componentes de liga.

Para os sólidos amorfos a condução de calor depende do transporte de energia molecular. Então a capacidade de condução desses sólidos é da mesma ordem de magnitude da observada nos líquidos. Isto é, sólidos amórficos conduzem o calor menos eficientemente que sólidos que possuem estrutura cristalina.

Sólidos que possuem poros preenchidos por gases apresentam menor capacidade de condução térmica comparados com materiais não porosos mais densos. Em geral, essa capacidade aumenta com a densidade, assim como também aumenta com a presença de umidade. A umidade em sólidos representa um problema especial na presença de gradientes de temperatura. Geralmente, a umidade migra das regiões mais frias, mudando as características do material e, em alguns casos, causando danos ao material ou a alguma estrutura no entorno. Em densidades muito baixas o espaço de gás pode ser tão grande que um escoamento convectivo interno pode aparecer. Esse escoamento por sua vez resulta em aumento da transferência de calor. Em materiais celulares ou porosos, a radiação interna também pode ser importante.

Macroscopicamente o fluxo de calor de uma região a outra do sólido é proporcional ao gradiente de temperatura existente entre as regiões. A constante de proporcionalidade dessa relação é a condutividade.

A condutividade é definida, conforme Kakaç (1993), como uma propriedade termofísica do material que pode ser interpretada como a taxa de transferência de calor que atravessa uma unidade de área, por uma unidade de comprimento, por unidade de diferença de temperatura. A magnitude da condutividade térmica apresenta uma grande faixa de variação, para diferentes materiais; por exemplo, de  $0.0152 [W m^{-1} K^{-1}]$  para dióxido de carbono até 429 para prata pura, ambos para uma temperatura de 300K. A Fig. 2-1 (Kakaç, 1993) apresenta a faixa da condutividade térmica de várias substâncias a temperaturas e pressões usuais.

A condutividade térmica dos materiais depende de aspectos microscópicos, tais como a sua composição química, estrutura física e estado. Ela também varia com a temperatura e pressão as quais o material está submetido. Na maioria dos casos, entretanto, a condutividade térmica é muito menos dependente da pressão do que da temperatura, então essa dependência da pressão pode ser negligenciada e a condutividade pode ser tabulada como função apenas da temperatura. A Fig. 2-2 obtida de Kakaç (1993) apresenta a condutividade em função da temperatura para várias substâncias. Entretanto, a variação da condutividade térmica com a temperatura pode ser desconsiderada, quando a faixa de temperatura não é muito ampla ou a dependência da propriedade com a temperatura não é muito severa.

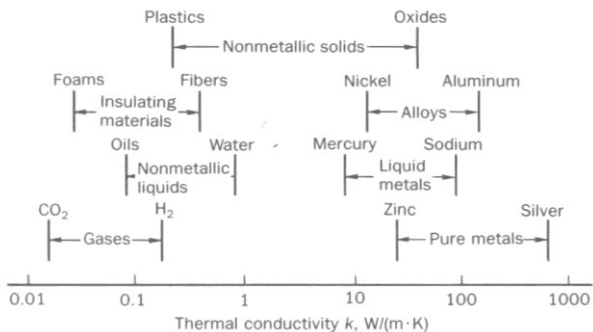


Figura 2-1 – Faixas de condutividade térmica de várias substâncias em temperaturas e pressões usuais. (Kakaç, 1993)

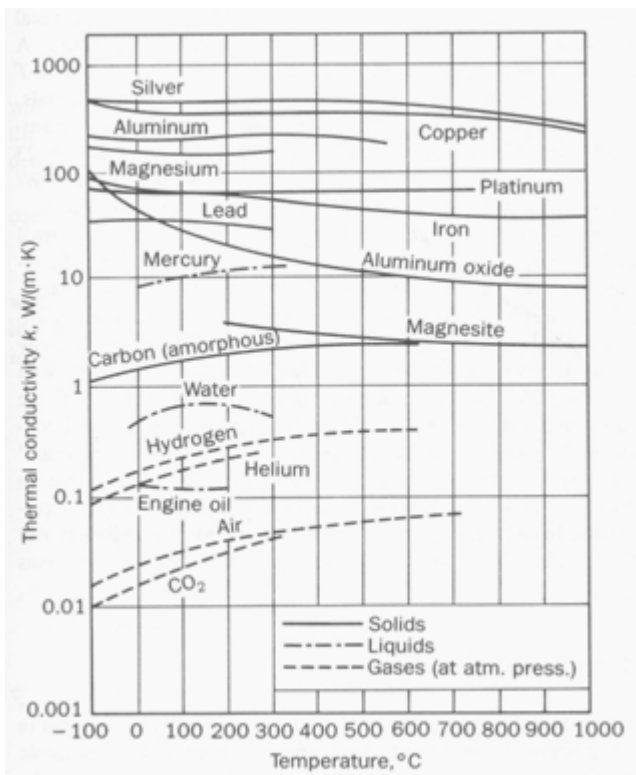


Figura 2-2 – Variação da condutividade térmica de diversas substâncias com a temperatura. (Kakaç, 1993)

### 2.3 MATEMÁTICA DA CONDUÇÃO DE CALOR

A descrição matemática da condução de calor, conforme apresentado na Secção 2.1, deve o seu equacionamento a Fourier. Entretanto, modernamente, a derivação da equação de condução de calor é apresentada de forma diferente daquela original de Fourier.

Partindo de um volume de controle elementar bidimensional (um quadrado, por simplicidade), faz-se um balanço da quantidade de calor que entra ou sai em cada uma das faces, conforme o esboço apresentado na Fig. 2-3 onde  $q''_x$  é o calor que entra pela superfície  $x$ ,  $q''_{x+\Delta x}$  é o calor que sai pela superfície  $x+\Delta x$ ,  $q''_y$  é o calor que entra pela superfície  $y$ ,  $q''_{y+\Delta y}$  é o calor que sai pela superfície  $y+\Delta y$  e  $\hat{Q}$  é o calor armazenado no volume de controle de dimensão  $\Delta x$  por  $\Delta y$ .

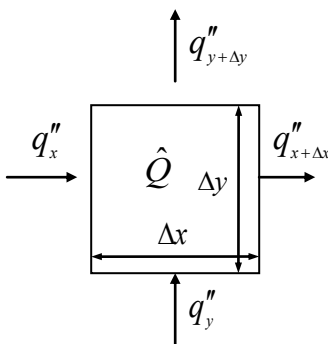


Figura 2-3 – Balanço de energia em um volume de controle elementar.

Fazendo-se o somatório dos fluxos de calor multiplicados pelo comprimento da secção transversal que o mesmo atravessa têm-se

$$\hat{Q}\Delta x\Delta y=(q''_x-q''_{x+\Delta x})\Delta x+(q''_y-q''_{y+\Delta y})\Delta y \quad (2.9)$$

Dividindo-se a Eq. 2.9 pela área do volume de controle e calculando o limite da expressão para uma área infinitesimal obtêm-se

$$\hat{Q}=\frac{\partial q''_x}{\partial x}+\frac{\partial q''_y}{\partial y} \quad (2.10)$$

Aplicando-se a equação constitutiva, também conhecida como Lei de Fourier, dada por:

$$q_n'' = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.11)$$

onde  $q_n''$  é o fluxo de calor na direção  $n$ ,  $k$  é a condutividade térmica e  $T$  é a temperatura, na Eq. 2.10. A mesma pode ser reescrita na forma:

$$\hat{Q} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.12)$$

Da termodinâmica têm-se a relação do calor acumulado em um corpo como sendo:

$$\hat{Q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.13)$$

onde  $\rho$  é a densidade e  $c_p$  é a capacidade calorífica a pressão constante. Inserindo a Eq. 2.13 na Eq. 2.12 tem-se:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.14)$$

que é a equação bidimensional transiente da conservação da energia térmica de um sólido, também chamada de equação de difusão térmica ou equação de condução.

Para a solução dessa equação é necessário conhecer a distribuição de temperatura inicial e as condições de contorno que o sólido está submetido.

### 2.3.1 Condições de contorno

As condições de contorno são descrições físico-matemáticas dos fenômenos que acontecem próximos às superfícies do sólido. Elas podem, no caso de condução, ser de três tipos: temperatura prescrita, fluxo prescrito e convecção.

### 2.3.1.1 Temperatura prescrita

Fisicamente é a condição na qual a temperatura de superfície da face assume um valor pré-determinado, podendo esse valor ser constante ou variável no tempo. Fisicamente, o caso de temperatura prescrita constante pode ser obtido através do contato de um segundo material na temperatura de mudança de fase com o objeto em estudo. Assim, a temperatura de interface entre os dois materiais pode ser considerada constante enquanto ocorre a mudança de fase do segundo material. No caso de temperatura variável no tempo pode-se apenas monitorar a temperatura de superfície do sólido e utilizar esse histórico para alimentar o problema. Normalmente pode ser descrita matematicamente na forma

$$T = T_p(t) \quad (2.15)$$

onde  $T_p(t)$  é a função da temperatura da superfície de interesse dependente do tempo.

### 2.3.1.2 Fluxo prescrita

Fluxo prescrita é a condição de contorno no qual o calor trocado entre o material e o meio assume um valor pré-determinado; essa quantidade pode ser constante ou variável em função do tempo. O caso de fluxo prescrita pode ser obtido experimentalmente através de radiação de uma fonte conhecida e controlável em ambiente de vácuo. Para o caso de fluxo variável desconhecido, uma possibilidade é a construção e instalação de fluxímetro na superfície da amostra. O resultado do histórico do fluxímetro pode ser utilizado para a resolução do problema. A condição de fluxo prescrita é representada matematicamente na forma

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = q_p''(t) \quad (2.16)$$

onde  $q_p''(t)$  é a função do fluxo prescrita na superfície de interesse dependente do tempo. O gradiente da temperatura é multiplicado pela

condutividade, conforme a lei de Fourier, e o sinal negativo indica que fluxo de calor positivo segue a convenção apresentada na Fig. 2-3.

### 2.3.1.3 Convecção

Convecção é a condição de contorno em que a quantidade de calor trocado entre o material e um meio fluido depende das características, movimentação e temperatura do fluido, não podendo ser pré-estabelecido. Essa condição de contorno é descrita pela lei de resfriamento de Newton, que diz que o calor que absorvido ou perdido por um corpo sólido é proporcional à diferença de temperatura entre o sólido e o fluido que está em contato ou, matematicamente:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h (T_{\infty} - T) \quad (2.17)$$

onde  $h$  é a constante de proporcionalidade chamada de coeficiente de convecção. O valor desse coeficiente varia em várias ordens de grandeza dependendo da situação e, muitas vezes, a sua determinação é um objeto de pesquisas e debates.

Por possuir o termo da derivada da temperatura, bem como o da temperatura em sua representação matemática, a condição de contorno de convecção também é chamada de condição mista.

### 2.3.1.4 Global

Baseado na organização das condições de contorno propostas por Beck et al. (1992), o presente trabalho apresenta o que será denominada de condição de contorno global. Desta forma as três condições de contorno anteriormente mostradas podem ser matematicamente condensadas em uma única condição, na forma:

$$-K \frac{\partial T}{\partial n} + B T = f \quad (2.18)$$

Para reproduzir as três condições anteriormente descritas, os três parâmetros ( $K$ ,  $B$  e  $f$ ) assumem os valores apresentados na Tabela 2-1.

No presente trabalho a condição de contorno global será usada sempre que possível para obter uma maior generalidade nas soluções.



Tabela 2-1 – Composição das condições de contorno a partir da condição Global

Condição	K	B	$f$	$-k \frac{\partial T}{\partial n} + BT = f$
Temperatura	0	1	$T_P(t)$	$T = T_P(t)$
Fluxo	K	0	$q_P''(t)$	$-k \frac{\partial T}{\partial n} = q_P''(t)$
Convecção	K	h	$h T_\infty$	$-k \frac{\partial T}{\partial n} + h T = h T_\infty$

### 2.3.2 Adimensionalização

Muitas vezes, por praticidade na obtenção e/ou comparação de resultados, é interessante adimensionalizar as variáveis com que se trabalha. No caso da condução de calor não é diferente, porém existem muitas formas de adimensionalização na literatura, cada uma dessas aplicadas a diferentes situações.

#### 2.3.2.1 Temperatura

A adimensionalização da temperatura é a que mais possui variações. A mais comum é:

$$\theta_T = \frac{T - T_O}{T_R - T_O} \quad (2.19)$$

onde  $\theta$  é a temperatura adimensionalizada,  $T_O$  é a temperatura inicial e  $T_R$  é uma temperatura de referência escolhida arbitrariamente. Em problemas envolvendo convecção costuma-se fazer a temperatura do fluido,  $T_\infty$ , como sendo o valor de referência, assim como em problemas de mudança de fase, usa-se a temperatura de mudança de fase como a referência.

Outra forma de adimensionalização também encontrada é:

$$\theta_q = \frac{T - T_o}{q_R'' L/k} \quad (2.20)$$

onde  $q_R''$  é um fluxo de referência escolhido arbitrariamente,  $L$  é um comprimento característico e  $k$  a condutividade térmica.

No caso de propriedades térmicas variando com a temperatura, um artifício é adimensionalizar a temperatura através da integração da propriedade. Por exemplo, no caso da condutividade dependente da temperatura, define-se:

$$\theta_k = \frac{\int_{T_o}^T k(\bar{T}) d\bar{T}}{\int_{T_o}^{T_R} k(\bar{T}) d\bar{T}} \quad (2.21)$$

onde  $k(T)$  é a condutividade em função da temperatura. Assim, a variação da condutividade é incorporada na temperatura do problema e, caso a natureza do problema permita, pode ser obtida uma solução em forma analítica.

### 2.3.2.2 Fluxo

A variável de fluxo pode ser adimensionalizada pelas expressões

$$Q_T = \frac{q''}{k(T_R - T_o)/L} \quad (2.22)$$

ou

$$Q_q = \frac{q''}{q_R''} \quad (2.23)$$

onde  $Q$  é o fluxo de calor adimensionalizado.

### 2.3.2.3 Posição

A variável de posição  $x$  é adimensionalizada na forma

$$\bar{x} = x/L \quad (2.24)$$

onde  $L$  é um comprimento característico escolhido.

#### 2.3.2.4 Tempo

A variável temporal  $t$  é adimensionalizada na forma do número de Fourier,  $\tau$ , definido por

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} \quad (2.25)$$

onde  $\alpha$  é a difusividade térmica definida por  $k/(\rho c_p)$ .

#### 2.3.2.5 Biot

O número de Biot,  $Bi$ , é um parâmetro adimensional associado à condição de contorno de convecção. Ele é definido na forma

$$Bi = \frac{h L}{k} \quad (2.26)$$

e pode ser interpretado fisicamente como a razão entre a facilidade de troca de calor do sólido com o fluido envolvido na convecção e a condução de calor no interior do sólido. Quanto maior o valor de  $Bi$ , maior a facilidade do fluido em extrair calor do sólido, consequentemente, maior será o gradiente de temperatura no interior do sólido. O inverso, i.e. baixos valores de  $Bi$ , indicam pequenos gradientes de temperatura no interior do sólido.

#### 2.3.2.6 Equação de calor

Usando-se as adimensionalizações definidas pelas Eqs. 2.19, 2.24 e 2.25, e considerando-se as propriedades constantes pode-se reescrever a Eq. 2.14 como sendo

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.27)$$

### 2.3.2.7 Condição de contorno

As condições de contorno podem ser adimensionalizadas pelas relações apresentadas nos itens anteriores. Na Tabela 2-2 são apresentados os coeficientes adimensionais da condição de contorno global adotados. Estas condições serão úteis na demonstração da interconectividade entre as diversas soluções analíticas, uma das importantes contribuições deste trabalho, como se mostrará adiante nesse trabalho.

Tabela 2-2 – Composição adimensional das condições de contorno a partir da condição Global

Condição	$K$	$B$	$f$	$-K \frac{\partial \theta}{\partial n} + B \theta = f$
Temperatura	0	1	$\theta_p(\tau)$	$\theta = \theta_p(\tau)$
Fluxo	1	0	$Q_p(\tau)$	$-\frac{\partial \theta}{\partial n} = Q_p(\tau)$
Convecção	1	$Bi$	$Bi \theta_\infty$	$-\frac{\partial \theta}{\partial n} + Bi \theta = Bi \theta_\infty$

## 2.4 TÉCNICAS DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA DIRETO

O problema de transferência de calor foi alvo de muita atenção da parte de diversos matemáticos, físicos e engenheiros ao longo dos anos. Isso se deve ao fascínio dos mecanismos físicos e da aplicabilidade das soluções nas indústrias e no dia-a-dia das pessoas. As equações que descrevem a transferência de calor em meio sólido (condução), são normalmente obtidas a partir da conservação da energia.

Para o problema da condução de calor onde as condições de contorno, geometria e propriedades do meio são conhecidas (causas) e deseja-se estimar a distribuição de temperaturas e de fluxos no interior do corpo (efeitos), dá-se o nome de problema direto. Esse tipo de problema pode ser resolvido utilizando-se vários métodos que podem ser agrupados em métodos por analogias, numéricos e analíticos.

Conforme Schiff (1999), os métodos por analogias foram muito desenvolvidos na década de 50 e 60. Especialmente a analogia

hidráulica e elétrica. Essa metodologia é baseada na similaridade das equações que descrevem dois fenômenos distintos. Assim, no caso da analogia hidráulica, observa-se que o equacionamento da vazão de água através de uma tubulação em sua forma adimensional resulta numa expressão semelhante à transferência de calor unidimensional em um sólido. Fazendo-se as devidas comparações, observa-se que a pressão de água na tubulação pode ser relacionada à temperatura do sólido, enquanto que a vazão de água é relacionada ao fluxo de calor. Entretanto, a analogia mais comumente utilizada é aquela observada entre as equações que envolvem a determinação de grandezas elétricas em um circuito elétrico e as equações de difusão do calor. A técnica consiste na solução matemática de um problema elétrico equivalente ao problema térmico de interesse. Os usuários da técnica (Johnson, 1963) consideram que, em muitos casos, é mais fácil montar-se um circuito elétrico apropriado e se fazer as medições de tensão e corrente do que encontrar a solução exata para o equacionamento de transferência de calor em geometrias complexas. Embora hoje em dia dificilmente se recorra a esta técnica experimental de construção física de um circuito elétrico equivalente, essa metodologia ainda é utilizada para a construção de modelos analíticos simples e rápidos. Esses modelos são extremamente úteis e práticos para situações em que se necessite soluções ágeis, embora pouco precisas, como no caso de pré-projetos em engenharia, aonde um nível de erro mediano possa ser admitido.

Os métodos numéricos, conforme Myers (1987), são ferramentas muito úteis para a solução de equações diferenciais parciais de todos os tipos e para um grande campo de aplicações, especialmente quando os problemas não podem ser tratados analiticamente devido a não-linearidades, complexidade de geometria ou de condições de contorno. O aumento da velocidade e capacidade de processamento dos computadores também criou um ambiente propício para o desenvolvimento de um grande ferramental numérico. De acordo com Ozisik (1993), muitos dos problemas complicados agora podem ser facilmente resolvidos a um baixo custo e em pouco tempo.

Atualmente os três principais ramos de estudos dos métodos numéricos para problemas de condução de calor são: método de diferenças finitas, método de elementos finitos e método de volumes finitos. Uma vasta literatura (Patankar, 1980; Maliska, 1995; Sobrinho, 2006) existe para cada um desses métodos mostrando suas vantagens e desvantagens, que depende da natureza do problema abordado.

O método das diferenças finitas é o de mais fácil formulação e aplicabilidade. Entretanto a fácil formulação muitas vezes pode

esconder o que Ösizik (1993) explicitou como a “necessidade de considerável experiência e conhecimento para a escolha do melhor esquema para um problema em específico.”

O método de elementos finitos (Sobrinho, 2006) está sedimentado em uma sólida base matemática o que pode, muitas vezes, caracterizá-lo como difícil e de complicada implementação. Mas a sua elegância matemática e maleabilidade em lidar com geometrias complexas fazem com que seja o método mais utilizado para a solução de problemas avançados. Entretanto, o método não é tão eficaz para lidar com termos não-lineares, como aqueles que surgem no caso de equações da hidrodinâmica.

Finalmente o método de volumes finitos (Maliska, 1995) é o mais recente entre os três citados. Partindo-se de uma noção de conservação de fluxos em regiões geométricas chamadas volumes, esse método ganhou espaço, especialmente entre engenheiros, por ter uma base física ao invés de matemática. Muitas vezes, durante a implementação de um caso simples, o método de volumes finitos se iguala ao método de diferenças finitas nos quesitos de facilidade de formulação. Mas a sua vantagem aparece ao lidar mais facilmente com termos não-lineares da hidrodinâmica.

As técnicas analíticas, por sua vez, têm o objetivo não somente de encontrar a solução para o problema mas que isso seja realizado sem discretizações numéricas e de forma exata sempre que possível.

Entre as técnicas analíticas, usualmente utilizadas em condução de calor transiente, as mais difundidas são: o método de separação de variáveis ou de séries de Fourier e o método da transformada de Laplace. Ambas as técnicas são exatas, ou seja, ao substituir-se a solução encontrada na equação de origem o resultado é zero. Por outro lado, existem técnicas aproximadas nas quais as soluções, ao serem substituídas na equação original, apresentam um resíduo não nulo. Nesse caso a solução encontrada é tão boa quanto menor o seu resíduo. Na lista das técnicas aproximadas encontram-se o método das imagens (Beck et al. 1992); os métodos variacionais (Arpacı, 1966; Vujanovic et al., 1994) onde se encontram os métodos de Galerkin, método de Ritz e de Kantorovich; algumas técnicas de transformadas integrais e o método do balanço integral do calor (*heat balance integral method*) – HBIM (Goodman, 1964), entre outras.

Não citado anteriormente, mas também de grande importância para a solução dos problemas de condução de calor direto, o método de função de Green, (Beck et al., 1992) precisa ser apresentado. O método, que deve seu nome ao matemático e físico inglês George Green (1773 –

1841), é uma ferramenta poderosa para a obtenção de soluções de diversos tipos de equações diferenciais parciais. A técnica se baseia na solução de um problema diferencial específico simples, com condições de contorno homogêneas, cuja solução serve de bloco base para obtenção de soluções de problemas mais complexos. No caso da condução de calor transiente, a solução base é a distribuição de temperatura obtida por um pulso instantâneo e local.

A técnica da função de Green não foi classificada nem como exata nem como aproximada por depender, para isso, do método utilizado para a obtenção da solução base. Na literatura, os principais métodos usados para esse fim são a separação de variáveis e a transformada de Laplace, o que classifica a função de Green como técnica exata. As principais vantagens da técnica, conforme Beck et al. (1992), são: flexibilidade, com a qual a mesma função base pode ser usada para diversos problemas diferentes; sistematização, uma vez que as funções base estão calculadas e tabuladas pode-se obter a solução do problema rapidamente e; fácil migração de soluções unidimensionais para multidimensionais. O principal problema do método é que ele necessita da solução do problema base por outro método e as características da solução do problema complexo estão atreladas a isso.

No presente trabalho será feito uso dos métodos de volumes finitos, de separação de variáveis, da transformada de Laplace, das imagens e do HBIM. Assim, estas técnicas serão apresentadas a seguir com maior detalhamento.

### **2.4.1 Método de separação de variáveis**

Na solução de problemas de condução de calor muitas vezes o conceito do método de separação de variáveis se mistura um pouco com o de séries de Fourier devido ao formato das soluções encontradas. Este fato provoca uma variação na nomenclatura das soluções encontradas na literatura, muitas vezes encontrando-se essa técnica com o nome de método de Fourier.

A técnica de separação de variáveis (Kreyszig, 1999) consiste, a partir de uma substituição adequada da variável dependente, na divisão da equação diferencial parcial em questão em duas equações diferenciais ordinárias, ou uma equação diferencial ordinária e outra parcial, mais fácil de ser resolvida. Normalmente a solução é assumida como sendo a soma ou multiplicação de duas funções, linearmente independente entre si. Em seguida reescreve-se a equação de forma que, de cada lado do sinal da igualdade, apareça uma expressão matemática envolvendo

apenas uma das variáveis. Assim, cada lado da expressão representa uma equação independente, as quais são igualadas através de uma constante de conectividade. A escolha dessa constante é arbitrária, mas não independente. Diferentes constantes levam a diferentes desenvolvimentos, matematicamente ou mais fáceis, ou mais difíceis ou que tornam a solução do problema impossível. Obviamente a mesma mudança de variáveis é aplicada às condições de contorno e inicial do problema original. Logo se tem um sistema com dois problemas teoricamente mais simples para resolver do que o inicial. Resolve-se cada um dos problemas separadamente pela melhor técnica aplicável a cada um deles e, após obter-se as soluções, retorna-se à função original, através da substituição das soluções obtidas.

Conforme apresentado por Myers (1998) a metodologia de separação de variáveis é um dos métodos de solução de equações diferenciais parciais mais utilizados, incluindo outras áreas que não a condução de calor. Entretanto o método apresenta algumas limitações relacionadas a pré-requisitos para a sua funcionalidade, são esses:

1) A equação diferencial parcial deve ser linear e homogênea. A condição de linearidade pressupõe que a equação não pode conter produtos da variável dependente nem de suas derivadas, enquanto que a condição de homogeneidade indica que se  $t$  é solução da equação, então  $Ct$ , onde  $C$  é uma constante, também deve sê-lo.

2) As condições de contorno devem ser lineares e, na sua maioria, homogêneas. Para problemas transientes, Myers (1998) é categórico em afirmar que todas as condições devem ser homogêneas.

3) O sólido deve apresentar condições de contorno simples. Isto é, o contorno do sólido deve se ajustar as iso-curvas do sistema de coordenadas utilizado.

No caso destas condições não serem atendidas, existem situações em que mudanças de variáveis podem ser propostas de forma que a equação modificada, bem como as respectivas condições – contorno e iniciais – atendem as especificações do método.

A técnica de separação de variáveis, normalmente, gera um problema de Sturm-Liouville (Kreyszig, 1999). O problema de Sturm-Liouville é definido como uma equação diferencial parcial linear homogênea de segunda ordem

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) + \lambda w(x))y = 0 \quad (2.28)$$



onde as funções  $p(x)$ ,  $q(x)$  e  $w(x)$  dependem do sistema de coordenadas utilizado, assim como de duas condições de contorno lineares, descritas nos extremos de um intervalo fechado  $(a,b)$ .

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 \frac{dy(a)}{dx} = 0 \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0 \quad (2.29.a)$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 \frac{dy(b)}{dx} = 0 \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0 \quad (2.29.b)$$

Soluções não triviais para essa equação existem, em geral, para um conjunto discreto de valores de um parâmetro  $\lambda$ . Estes são os valores característicos, ou autovalores, do problema e as respectivas soluções são as funções características ou autofunções. A solução geral do problema é o somatório das funções características multiplicadas por uma constante de peso, independente para cada autofunção, normalmente chamado de constante da autofunção.

A técnica de solução de Sturm-Liouville nos problemas oriundos da separação de variáveis da condução de calor unidimensional transiente em coordenadas cartesianas apresenta as funções características na forma trigonométrica de senos e cossenos, formando uma base ortogonal dentro de um intervalo  $(0,L)$ , onde  $L$  indica um comprimento característico. A solução então pode ser vista como uma expansão em séries trigonométricas ortogonais, tal como a expansão em séries de Fourier, donde normalmente é dado o nome da técnica.

No caso de um sólido semi-infinito, o conjunto de autovalores que era discreto passa a ser contínuo e, conseqüentemente, o somatório de soluções se transforma em integral caracterizando assim a solução no formato da transformada de Fourier.

Para o caso em que as condições de contorno sejam dependentes do tempo é necessário fazer uso do Teorema de Duhamel, conforme apresentado em Arpaci (1966), para a obtenção da solução procurada. Neste caso é importante notar que a solução tenderá a zero nas fronteiras ao invés de tender ao valor das condições de contorno aplicadas naquele local. A razão para isso, conforme Ozisik (1993), é que a solução na forma de séries não apresenta convergência uniforme nos pontos de fronteira. Assim a solução obtida é válida apenas no intervalo aberto entre os pontos da fronteira. Essa dificuldade pode ser superada através da aplicação de integração por partes quando do uso do Teorema de

Duhamel e, posteriormente, a substituição da expressão do resultado encontrado em séries pela sua equivalente em forma fechada.

#### **2.4.2 Transformada de Laplace**

De acordo com o histórico apresentado por Schiff (1999), as transformadas integrais apareceram inicialmente no trabalho de Leonard Euler em 1763 e 1769. Euler as usava para a solução de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. As transformações usadas por Euler eram escritas na mesma forma em que hoje se apresentam as transformadas inversas de Laplace. Importante notar que mesmo Laplace, em seu trabalho “Teoria analítica das probabilidades” (1812), credita a Euler a introdução das transformadas integrais (Schiff, 1999). Foi no trabalho de Spitzer em 1878 que o nome de Laplace apareceu relacionado com a expressão usada por Euler. No final do século XIX, ainda conforme Schiff (1999), a transformada de Laplace foi estendida para a sua forma complexa por Poincaré e Pincherle, e posteriormente estendida para duas variáveis por Picard com investigações posteriores conduzidas por Abel e muitos outros.

Schiff (1999) cita que a primeira aplicação moderna da transformada de Laplace é encontrada no trabalho de Bateria em 1910 que a usa para a solução do problema de decaimento radioativo. Após isso, Bernstein em 1920 usa a expressão, chamando-a de transformação de Laplace em seu trabalho sobre funções theta. A abordagem mais atual foi dada, conforme Schiff (1999), particularmente por Doetsch em 1920 e 1930; ele aplicou a transformada de Laplace a equações diferenciais, integrais e integro-diferenciais. O corpo do seu trabalho teve seu ápice no livro-texto de 1937 “Theorie und Anwendugen der Laplace Transformation”.

Nenhum histórico sobre a transformada de Laplace poderia estar completo sem mencionar o trabalho de Oliver Heaviside, que produziu um grande conjunto de transformações e aplicações, especialmente no contexto da engenharia elétrica, no que se chamou Cálculo Operacional. Esse material está espalhado nos três volumes da “Teoria Eletromagnética” (1894, 1899 e 1912) e mantém muitas similaridades com o método da transformada de Laplace. O Cálculo Operacional era o método aplicado para a solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes, problema muito comum na teoria de circuitos elétricos. Assim, embora o cálculo de Heaviside não fosse matematicamente rigoroso, ele encontrou espaço entre os engenheiros elétricos como uma ferramenta útil para a solução de seus

problemas. Depois disso um grande esforço de pesquisa passou a ser feito de modo a desenvolver um maior rigorismo para o Cálculo Operacional e obter uma conexão do mesmo com o método da transformada de Laplace. Nesse esforço o método foi estendido para a solução de equações diferenciais parciais do eletromagnetismo e condução de calor. Com essa nova abordagem, um grande número de novas soluções foi desenvolvido – não apenas soluções de problemas até então insolúveis, mas, principalmente, de novos tipos de soluções para problemas já resolvidos, como a questão das soluções de tempo curto e tempo longo que será abordado posteriormente.

No campo de condução de calor transiente, Carslaw & Jaeger (1959) relatam que todos os problemas resolvidos pelo método de Fourier também podem ser resolvidos pelo método de Laplace. Entretanto, Luikov (1968) chama a atenção de que, para esses problemas, o método da transformada de Laplace pode ser muitas vezes preferido do ponto de vista de simplicidade de abordagem mesmo que o resultado obtido seja matematicamente idêntico ao desenvolvido com o método de Fourier. A vantagem do método de Laplace em relação ao de Fourier aumenta com o aumento da complexidade do problema a ser resolvido, uma vez que o método de Fourier passa a apresentar dificuldades em sua aplicação.

Conforme Luikov (1968), a grande vantagem do método da transformada de Laplace consiste no fato que não a função em si, mas a sua transformada, é resolvida. Esta transformação é realizada com a multiplicação da função em estudo por uma função exponencial e a sua integração de zero a infinito. A transformada integral,  $F(s)$ , da função  $f(\tau)$  é determinada pela fórmula

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau \quad (2.30)$$

e a transformada inversa é dada pela expressão

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s) \exp(s\tau) d\tau \quad (2.31)$$

onde  $i = \sqrt{-1}$  e  $\gamma$  é um número positivo. A transformada de Laplace,  $F(s)$ , também pode ser representada por  $L[f(\tau)]$  e a respectiva inversa,  $f(\tau)$ , por  $L^{-1}[F(s)]$ . Na transformada admite-se que  $s$  possa ser um número complexo, embora seja necessário que a parte real seja positiva. Para que a transformada exista, é necessário que a integral exista, o que impõe certas limitações para a função  $f(\tau)$ , a principal delas é que a função deve tender a zero quando  $\tau$  tender a zero. Essa condição, para o problema de condução de calor transiente, implica necessariamente que a temperatura inicial do sólido deve ser zero. De maneira geral, de modo a eliminar problemas, a função  $f(\tau)$  é considerada contínua por partes e diferente de zero apenas  $\tau > 0$ .

O método de solução de uma equação diferencial parcial por método da transformada de Laplace consiste em três passos:

1. A transformada de Laplace é aplicada na equação diferencial e nas condições de contorno. Como a transformada de Laplace é uma transformação integral e possui propriedades de operador obtêm-se uma equação mais simples de ser resolvida.

2. A equação transformada é resolvida em função da variável restante, considerando-se a variável  $s$  como um número constante. Esse passo tem como objetivo determinar a solução da transformada.

3. A partir de relações conhecidas entre a função transformada  $F(s)$  e a função original  $f(\tau)$ , a solução para a inversão é obtida e, conseqüentemente, a solução original desejada. Nesse passo é que se concentram as maiores dificuldades do método, porque apesar de muitas inversões serem simples, podendo ser facilmente obtidas com a ajuda de tabelas, outras podem ser difíceis, podendo exigir conhecimento de técnicas de integração no plano complexo e/ou grandes desenvolvimentos analíticos.

De forma a realizar esses três passos de forma bem sucedida é necessário conhecer as propriedades da transformada de Laplace. Elas estão apresentadas na Tabela 2-3 conforme em Luikov (1968).

Não é objetivo do presente trabalho detalhar essas propriedades, maiores informações sobre as mesmas podem ser obtidas em diversos livros tais como Luikov (1968), Carslaw & Jaeger (1959), entre outros. Mas é importante ressaltar que um importante desdobramento do teorema de Efos, que é uma generalização do teorema da convolução

(Luikov, 1968), é a relação: 
$$\frac{F(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{4\tau}\right) F(u) du,$$

muito utilizada no desenvolvimento de soluções relacionadas com problemas de difusão.

Tabela 2-3 – Propriedades da Transformada de Laplace  
(A variável  $a$  é real, constante e positiva.)

Linearidade:	$L[Af(\tau) + Bg(\tau)] = AF(s) + BG(s)$
Transformada da derivada:	$L[f'(\tau)] = sF(s) - f(0)$
Transformada da integral:	$L\left[\int_0^{\tau} f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$
Teorema da substituição:	$L[f(a\tau)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
	$L\left[f\left(\frac{\tau}{a}\right)\right] = aF(as)$
	$L[\exp(a\tau)f(\tau)] = F(s-a)$
Teorema da defasagem:	$L[\text{Heaviside}(\tau-a)f(\tau-a)] = \exp(-as)F(s)$
Diferenciação da Transformada:	$F^{(n)}(s) = L\left[(-\tau)^n f(\tau)\right]$
Integração da Transformada:	$\int_s^b F(p) dp = L\left[\frac{f(\tau)}{\tau}\right]$
Multiplicação das transformadas: Convolação	$F_1(s)F_2(s) = L\left[\int_0^{\tau} f_1(u)f_2(\tau-u) d\tau\right]$
Teorema de Efros:	$F(\varphi(s))\Phi(s) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau)\psi(\tau, u) d\tau du$ onde $\exp(-\tau\varphi(s))\Phi(s) = \int_0^{\infty} \psi(\tau, u)\exp(-su) du$
Teorema de expansão:	$L^{-1}\left[\frac{\Phi(s)}{\psi(s)}\right] = \sum_{n=1}^m \left\{\frac{\Phi(s_n)}{\psi'(s_n)}\right\} \exp(s_n \tau)$ onde $s_n$ são as $m$ raízes de $\psi(s) = 0$ .

Um aspecto já mencionado anteriormente, mas ainda não discutido com profundidade, diz respeito às soluções de tempo curto e de tempo longo.

As soluções de condução de calor transiente em regiões finitas normalmente são expressas em forma de séries. Essas séries convergem rapidamente para grandes valores de tempo. Isso por possuírem um termo exponencial negativo, dependente do tempo, que acaba atenuando rapidamente os termos de ordem mais alta da série. Mas esse mesmo termo acaba por comprometer a convergência da série para valores de tempo muito baixos, por aumentar a importância e o peso dos termos de alta ordem.

Devido a essa limitação, essas soluções não são convenientes para uso em códigos computacionais ou para análises analíticas em fenômenos de transiente rápido. Assim é necessário o desenvolvimento de uma forma alternativa para a solução que convirja rapidamente para tempos pequenos. Nesse caso, a transformada de Laplace apresenta uma interessante característica que é o fato de grandes valores da variável transformada,  $s$ , corresponderem a pequenos valores da variável original,  $t$ . Dessa forma, uma solução aproximada pode ser obtida se a solução for expandida como uma série assintótica no domínio transformado e invertido termo-a-termo para o domínio original. Essa solução apresentará uma convergência rápida para tempos curtos.

De acordo com Ozisik (1993), o período de tempo curto pode ser considerado quando o tempo adimensional de Fourier,  $\tau$ , definido como o tempo multiplicado pela razão da difusividade térmica do material pelo comprimento característico do mesmo, for aproximadamente menor que 0,02. Por sua vez Beck indica que para valores de  $\tau$  menores que 0,05 apenas três termos da solução de tempo-curto são necessários para uma acurácia de quatro casas decimais. Uma discussão desses valores e a comparação entre os dois tipos de solução serão apresentadas no capítulo de análise.

### **2.4.3 Método das Imagens**

Conforme Carslaw & Jaeger (1959), embora o método das imagens tenha a sua maior aplicação na matemática da teoria dos campos elétricos, o mesmo pode ser adaptado para solucionar problemas de condução de calor, quando o sólido tem como condição de contorno temperatura ou fluxo de calor de valor zero.

Conforme Luikov (1968), qualquer processo de condução de calor em um sólido pode ser descrito como uma combinação de efeitos

de numerosas fontes de calor elementares distribuídas no espaço e no tempo, que provocam uma variação de temperatura. O sólido é imaginado infinito em todas as direções e, pelo processo de criar imagens nas superfícies de fronteira, uma distribuição de fontes e sumidouros é obtida de tal modo que a condição de contorno é reproduzida. A solução do problema por esse método se reduz a escolha adequada da intensidade de fontes e sumidouros bem como a sua distribuição.

Na revisão bibliográfica realizada no tema de condução de calor não foi encontrada nenhuma informação sobre técnicas para a determinação dessas intensidades ou distribuições que não fosse o conhecimento prévio do usuário ou tentativa-erro. Entretanto, as soluções pelo método das imagens podem ser conectadas às soluções de Fourier através da transformada de Laplace. Solucionando-se a condução de calor através da transformada de Laplace e usando o teorema de inversão obtemos a solução de Fourier. Fazendo a expansão da transformada em série de exponenciais negativas obtemos a solução das Imagens.

O presente trabalho não tem como objetivo dissecar as técnicas utilizadas no método das imagens, mas sim utilizar a sua base física para melhor entender as soluções encontradas pelo método de Laplace. Para maiores informações sobre o método sugere-se procurar em Carslaw & Jaeger (1959), Luikov (1968) e Beck et al. (1992).

#### **2.4.4 Método do Balanço Integral do Calor**

O Método do Balanço Integral do Calor (HBIM) foi desenvolvido por Theodore R. Goodman baseado no método de Karman-Polhausen e, conforme expresso por Goodman (1983),

“... embora aproximado, [o método] fornece soluções com nível de acurácia adequada para seu uso em engenharia e tem a vantagem de reduzir o problema de resolver uma equação diferencial parcial em uma equação diferencial ordinária que é, relativamente, mais simples.” [T.A.]

Conforme Hristov (2009), o HBIM é um método simples do ponto de vista matemático. Entretanto, atrás dessa simplicidade formal está um profundo conhecimento da física do processo de difusão do

calor. Isto porque o método aborda o paradoxo de Fourier de uma forma inovadora através do uso do comprimento de penetração do calor.

O comprimento de penetração do calor é, usualmente, definido de forma análoga à espessura da camada limite hidrodinâmica, isto é, conforme Yan (2002), a distância normal à superfície do material em que a temperatura varia em 1% em relação a diferença entre a temperatura instantânea da superfície, aquecida ou resfriada, e a temperatura inicial. Entretanto, fisicamente, a definição mais adequada para o comprimento de penetração do calor é a distância medida partindo-se da superfície aquecida, a partir da qual o aquecimento imposto na superfície não causou alteração na temperatura inicial do corpo. Matematicamente, isso pode ser expresso como a distância entre a superfície e o primeiro ponto a partir do qual a temperatura é igual à temperatura inicial. Neste ponto o fluxo de calor é, simultaneamente, nulo.

Com essa nova definição, mais física, do comprimento de penetração do calor, pode-se transpor o paradoxo de Fourier (ver seção 2.1), uma vez que a velocidade de propagação de uma perturbação na superfície de um corpo não mais precisa ser considerada infinita, mas passa a ser igual à velocidade da penetração do calor no corpo. Essa distância é uma função do tempo e a sua determinação é um ponto-chave do método.

Ozisik (1993) apresenta o HBIM nas seguintes etapas:

1. A equação de condução do calor é integrada no espaço entre a superfície do sólido e o ponto de penetração do calor. Fisicamente isso significa fazer um balanço da energia do sólido e, com isso, elimina-se a derivada espacial da equação diferencial. Contudo, essa etapa faz com que a solução obtida garanta apenas a conservação global da energia do sólido.

2. Escolhe-se um perfil de temperatura para o intervalo entre a superfície do sólido e o ponto de penetração do calor que satisfaça as condições de contorno do problema. Essa escolha é baseada em sugestões da literatura e na experiência do usuário do método.

3. Introduce-se o perfil escolhido na equação integral da etapa 1 e realiza-se as operações de integração e derivação do perfil de modo a adaptar a equação ao perfil escolhido. Após algum algebrismo, obtém-se uma equação diferencial ordinária para o ponto de penetração do calor. Resolve-se a equação e obtém-se uma solução dependente do tempo.

4. A partir da solução da equação diferencial da etapa 3 e do perfil escolhido na etapa 2 pode-se escrever a solução final do problema,



ou seja, a expressão da temperatura do interior do corpo em função da posição e do tempo.

Como pode ser notada pela descrição do método, uma questão muito importante é a escolha do perfil de temperatura adequado. Isso porque a acurácia da solução obtida com o uso do método está diretamente ligada ao perfil utilizado. Historicamente, as aproximações polinomiais são as mais escolhidas, entretanto, conforme Goodman (1964), "... não há garantia de que o aumento da ordem do polinômio usado aumente a acurácia da solução" e, de fato, isso não acontece na maioria das vezes. A necessidade de escolher o perfil de temperatura, conforme Hristov (2009), é a queixa mais comum sobre o método.

Contudo, conforme apresentado por Wood et al. (2009), desde a proposta original de Goodman, muitos trabalhos foram escritos visando melhorar os resultados originais do método. Nesses trabalhos duas principais linhas podem ser detectadas: modificação do perfil de temperatura utilizado para minimizar os erros de aproximação ou subdivisão do domínio de interesse, usando como perfil de temperatura uma função por partes, onde cada uma dessas partes é uma polinômio de grau 1 ou 2.

Sadoun et al. (2009) justifica a abordagem de sub-divisões com o argumento de que:

"... embora haja um grande número de pesquisadores trabalhando no método, infelizmente, não há um procedimento sistemático para obtenção do perfil de temperaturas mais apropriado a ser utilizado. Assim, os trabalhos estão se orientando de modo a diminuir a dependência da acurácia da escolha do perfil."  
[T.A.]

Esta abordagem normalmente tende a algoritmos de solução muitos similares aos algoritmos numéricos clássicos tais como diferenças finitas e volumes finitos.

Na outra abordagem, diversos autores mantêm-se no objetivo de encontrar o melhor perfil de temperatura a ser utilizado no HBIM. Nessa concepção, Braga et al.(2003) propuseram um perfil de temperatura para o problema de condução de calor unidimensional em um sólido semi-infinito com condição de contorno ablativa, onde o expoente da função proposta não era um número inteiro. O uso deste perfil resultou em uma melhor comparação com as soluções exatas do que as obtidas com as

funções polinomiais clássicas (expoente inteiro). Em 2004, Braga et al. continuaram as pesquisas com perfil de expoente não inteiro, agora para o problema de ablação em sólido finito. Baseados nesses resultados, Braga et al. apresentaram em 2005, dois trabalhos tratando da nova abordagem do HBIM para sólido semi-infinito submetido a diversas condições de contorno na superfície livre: fluxo prescrito e temperatura prescrita (Braga et al. 2005<sup>1</sup>) e convecção (Braga et al. 2005<sup>2</sup>). Todos apresentaram muito bons resultados. Mais tarde, em 2009, Braga e Mantelli aplicaram a mesma abordagem para condução de calor em sólidos finitos, sujeitos as condições de contorno de temperatura prescrita e fluxo prescrito, novamente apresentando bons resultados. Seguindo essa tendência, Meyers (2008) e Hristov (2009), baseando-se no trabalho de Braga (2005<sup>1</sup>), usaram diferentes métodos para determinar o valor ideal para o expoente da função do perfil de temperatura, que comparam bem com os valores de Braga (2005<sup>1</sup>).

## 2.5 TÉCNICAS DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

Embora existam outras técnicas para a solução de problemas inversos, as técnicas apresentadas neste capítulo foram escolhidas por serem, de acordo com Özisik e Orlande (2000), de aplicação bastante universal, versáteis e poderosas para as dificuldades associadas à solução dos problemas inversos encontrados na área de engenharia térmica.

Contrariamente ao que ocorre com os problemas diretos, o problema inverso é aquele no qual se deseja estimar as causas a partir do conhecimento dos efeitos. Utiliza-se o termo estimar, ao invés de determinar, porque as temperaturas utilizadas para a solução do problema inverso normalmente são obtidas experimentalmente e, conseqüentemente, possuem erros. Desta maneira, o resultado obtido pela análise inversa (seja da condição de contorno ou das propriedades) não é considerada exata, mas uma estimativa, dependente tantos dos erros experimentais, quanto dos erros inerentes ao próprio método inverso utilizado.

A metodologia empregada para a solução de problemas inversos, conforme Özisik e Orlande (2000), consiste em:

- Obter os efeitos experimentalmente, arbitrar as causas e calcular os efeitos pelo método direto.
- Comparar os valores dos efeitos calculados e obtidos experimentalmente.

- Estimar novas causas e iterar até que a diferença entre os efeitos estimados e determinados esteja dentro de um intervalo pré-estabelecido.

Na grande maioria dos trabalhos analisados, observou-se que a solução do problema inverso é obtida pela minimização do quadrado da diferença entre os efeitos experimentais e os calculados, procedimento denominado de problema dos mínimos quadrados. Assim, os métodos de solução dos problemas inversos servem para, conhecida a solução do problema direto, determinar as variações necessárias para as novas causas, de maneira a minimizar, de maneira rápida e estável, a diferença entre os efeitos. De maneira geral, esses métodos de solução podem ser de dois tipos: estimativa de parâmetros ou estimativa de funções. Se existe alguma informação disponível sobre a forma funcional da variável de interesse a ser determinada, então se utilizam os métodos de estimativas de parâmetro, que são mais leves e rápidos. Caso contrário, se nenhuma informação estiver disponível, se faz necessário o uso dos métodos de estimativa de funções. A seguir é apresentado com mais profundidade o método dos mínimos quadrados e alguns procedimentos encontrados na literatura para resolvê-lo.

### 2.5.1 Método dos Mínimos Quadrados

O Método dos Mínimos Quadrados, chamado de agora em diante de MMQ, é derivado diretamente do princípio estatístico da máxima probabilidade (Helene, 1991).

A partir de uma medida de  $N$  dados independentes com distribuição normal,  $F(x)$ , dada por

$$F(x) = \frac{\exp\left(-\frac{(x_i - x)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi} \sigma} \quad (2.32)$$

onde  $x$  é o valor médio e  $\sigma$  é o desvio padrão da distribuição. A probabilidade de obter-se um determinado conjunto de dados  $\{x_i\}$  é dada pela multiplicação da distribuição de probabilidade de cada um dos dados e pode ser escrita na forma

$$P(x, \sigma) = \frac{\exp\left(-\sum \frac{(x_i - x)^2}{2\sigma^2}\right)}{(\sqrt{2\pi} \sigma)^N} \quad (2.33)$$

O que o princípio apresenta é que existe um único conjunto de valores de  $x$  e  $\sigma$  que torna máximo o valor de  $P(x, \sigma)$ . Helene (1991) demonstra que o valor máximo de  $P(x, \sigma)$  (Eq. 2.33) ocorre no valor mínimo do expoente da função exponencial. Por uma questão de desenvolvimento define-se a função objetivo dos mínimos quadrados,  $Q$ , sendo:

$$Q = \sum \frac{(x_i - x)^2}{2\sigma^2} \quad (2.34)$$

No caso de ajustes de parâmetros de modelos, consideram-se o conjunto de dados  $\{x_i\}$  como sendo os dados experimentais e  $x$  o modelo com os seus parâmetros dados por  $\{p_j\}$ . O processo de minimização da função objetivo é realizado igualando-se a primeira derivada da função em relação a cada um dos parâmetros a zero. Assim obtêm-se um sistema de  $j$  parâmetros e  $j$  equações. Esse sistema pode ser descrito e resolvido na sua forma matricial.

A matriz que envolve os termos da primeira derivada da função objetivo é chama de matriz de sensibilidade. Esta matriz consome um grande tempo computacional no seu cálculo.

Quando se emprega o método dos mínimos quadrados na solução de alguns tipos de problemas inversos, como o caso da condução de calor, a matriz de sensibilidade calculada apresenta o seu determinante próximo de zero. Essa condição torna-se um problema pois esse determinante muito próximo de zero aumenta a instabilidade do sistema, levando, em muitos casos, à divergência da solução. Devido a essa condição esses problemas são denominados de mal-postos e para contornar esse problema utiliza-se da aplicação de pré-condicionadores na matriz de sensibilidade e/ou faz-se uso de métodos estabilizados.

Alifanov et al. (1995) mostram que os métodos para cálculo de problemas mal-postos derivam, em sua grande maioria, das técnicas de regularização iterativa de Tikhonov, publicadas nas décadas de 50 e 60 na então União Soviética (URSS). A técnica da regularização iterativa é baseada na obtenção de um fator de correção da última iteração do

processo em relação ao erro dos dados iniciais. (Alifanov et al., 1995) Deste modo, há a garantia de que, caso a iteração convirja, o erro encontrado será menor do que a da iteração anterior.

### **2.5.2 Método de Levenberg-Marquardt**

A Técnica de Levenberg-Marquardt, conforme descreve Özisik et al. (2000), é um método iterativo para a solução de problemas de mínimos quadrados, através de estimação de parâmetros. Esta técnica foi primeiramente desenvolvida por Levenberg em 1944 através de uma modificação da norma dos mínimos quadrados. Posteriormente, em 1963, Marquardt obteve os mesmos resultados a partir de uma abordagem diferente.

O método de Marquardt, (Schewchuk, 1994) faz uso de um parâmetro que varia durante os passos da solução iterativa para obter um comportamento similar ao método do passo descendente, em que pequenas variações são feitas na direção do gradiente negativo da função objetivo, nas proximidades do valor inicial do problema e igual ao método de Gauss nas proximidades do ponto que minimiza os mínimos quadrados.

O então chamado Método Levenberg-Marquardt tem sido aplicado para obtenção da solução de uma variedade de problemas inversos envolvendo estimativas de parâmetros desconhecidos, sejam eles lineares ou não, com grande eficiência. Entretanto, as dificuldades de implementação e convergência do método aumentam nas estimativas não lineares e/ou que envolvem um grande número de parâmetros desconhecidos, devido ao tempo gasto no cálculo da matriz de sensibilidade.

### **2.5.3 Método do Gradiente Conjugado**

Conforme Himmelblau (1972), nos métodos iterativos de solução de um sistema matricial, a cada iteração as variáveis avançam, de forma controlada, em uma dada direção. Normalmente escolhe-se a direção de maior valor do gradiente negativo, esses métodos são conhecidos como método de gradientes. Como esse gradiente representa um vetor direção, existe um vetor perpendicular a este, chamado de conjugado do vetor. Assim o avanço da solução ocorre na direção do maior gradiente negativo até o ponto em que o conjugado do gradiente possui o seu valor máximo. No método do gradiente conjugado, na iteração seguinte, ao invés de se utilizar novamente da direção do maior valor de gradiente

negativo, o sentido da descida é obtido através de uma combinação linear do sentido negativo do gradiente, calculado na iteração atual, com o sentido de descendente obtido na iteração precedente. Essa combinação linear é tal que o ângulo resultante entre o sentido da descida e o sentido negativo do gradiente é menor que  $90^\circ$  o que assegura a minimização da função, o que não ocorre nos outros métodos de gradiente. Ozisik et al. (2000) chamam a atenção que, tal como o método de Levenberg-Marquardt, esta técnica necessita da obtenção da matriz de sensibilidade o que pode levar ao aumento do tempo computacional gasto na resolução do problema.

#### **2.5.4 Método do Gradiente Conjugado com Problema de Apoio**

Ozisik et al. (2000) apresentam o Método do Gradiente Conjugado com Problema de Apoio como alternativa ao método do Gradiente Conjugado onde dois problemas auxiliares, conhecidos como problema de sensibilidade e problema de apoio, são resolvidos para a determinação do tamanho do passo iterativo a ser dado no Método Gradiente Conjugado, bem como na obtenção do gradiente da equação, para melhor determinação da direção descendente a ser utilizada. Esta técnica é especialmente usada para a solução de problemas que envolvam a estimativa de parâmetros de uma função da qual não se conhece a sua forma funcional e, por isso, não se pode calcular a matriz de sensibilidade.

#### **2.5.5 Método do Gradiente Conjugado com Problema de Apoio para Estimativa de Função**

Já o Método do Gradiente Conjugado com Problema de Apoio para a Estimativa de Função é a técnica mais poderosa entre as encontradas nesta revisão. Isto porque nenhuma informação sobre a variável que se deseja estimar é necessária a priori, exceto sobre o espaço funcional a qual ela pertence, isto é, o domínio e a imagem onde a função existe e pode ser definida. Além disso, a técnica utiliza as vantagens do método do Gradiente Conjugado com Problema de Apoio para a determinação dos valores necessários a cada iteração (tais como tamanho do passo iterativo e a direção de maior gradiente negativo possível). Entretanto, esse é um método de alta complexidade de implementação e alto custo computacional, especialmente em problemas com alto grau de não-linearidade.

### 3 MODELAGEM E DESENVOLVIMENTO DE SOLUÇÕES

Neste capítulo serão apresentados os modelos físicos e matemáticos empregados nos problemas unidimensionais de condução de calor em um sólido sujeito a uma combinação de condições de contorno dos três tipos, que são resolvidos no presente trabalho

Após a modelagem, será apresentado um conjunto de soluções empregando-se três técnicas clássicas distintas: transformada de Laplace (seção 3.3), separação de variáveis (seção 3.4) e método do balanço integral do calor (seção 3.5).

Utilizam-se as condições de contorno no formato global, de forma que as soluções obtidas são válidas para qualquer condição de contorno em particular. Esta forma de apresentação de resultados é nova na literatura. A substituição de valores numéricos nos parâmetros das soluções resultará na obtenção das soluções clássicas encontradas na literatura (Carslaw & Jaeger (1959), Arpaci (1966), entre outros).

As soluções serão desenvolvidas para condições de contorno na superfície livre variáveis no tempo, expressas no formato  $f_0 t^m$ . O aquecimento do sólido se dá pela superfície livre, sendo que os valores de  $f_0$  bem como de  $m$  variam conforme o tipo de condição de contorno utilizada. Esta função representa tanto condições de contorno constantes, fazendo-se  $m=0$ , como condições variáveis no tempo, para  $m \neq 0$ .

Observe-se que a condição de contorno na forma  $t^m$ , pode ser considerada como sendo um termo de uma série de potência e acaba por gerar uma solução. Assim, outras condições de contorno transiente de interesse de engenharia, caso possam ser decompostas em uma série de potência, tem como solução o somatório das soluções encontradas para cada termo da série.

Deve ser notado, durante os desenvolvimentos a seguir, que as soluções clássicas apenas existem para valores de  $m$  tais que  $2m$  seja inteiro, restrição esta que não se apresenta nas soluções obtidas pelo HBIM.

#### 3.1 MODELO FÍSICO

Considera-se neste trabalho a condução de calor em um objeto sólido homogêneo com as propriedades térmicas: condutividade ( $k$ ), densidade ( $\rho$ ) e capacidade térmica a pressão constante ( $c_p$ ) conhecidas e constantes em todo sólido. Para fins de desenvolvimento teórico, considera-se que o sólido possua dimensões nas direções ortogonais  $y$  e

$z$  muito maiores do que a dimensão na direção  $x$ ; esta hipótese justifica o uso da aproximação unidimensional.

As faces: esquerda e direita do sólido na direção  $x$  são denominadas  $A$  e  $B$ , respectivamente. As duas faces são submetidas independentemente às condições de temperatura prescrita, fluxo prescrito e convecção, em qualquer combinação possível.

Como condição inicial, considera-se o sólido a uma temperatura constante,  $T_o$ , até o início do processo de aquecimento na superfície  $A$  no instante  $\theta$ . O calor é conduzido pelo material aumentando a temperatura em uma região à esquerda do mesmo enquanto o restante do sólido permanece na temperatura inicial.

Na Fig. 3-1, a posição  $\Delta$  marca a penetração do calor, ou seja, a posição que delimita a região aquecida e a região não aquecida do sólido. A distância entre as posições  $\Delta$  e  $\Delta_A$  (posição da superfície  $A$ ) é denominada comprimento de penetração do calor,  $U$ . O valor de  $\Delta$  é dependente do tempo e, conforme o tempo avança, este também avança, eventualmente atingindo a superfície  $B$ , situada na posição  $\Delta_B$ , no instante  $t_o$ . Antes desse encontro, o sólido se comporta como um meio semi-infinito e as condições da superfície  $B$  não precisam ser consideradas. A partir do instante  $t_o$  as condições de fronteira da superfície  $B$  necessitam ser consideradas e a hipótese de sólido semi-infinito não é mais válida. Na Fig. 3-1 estão esquematizadas as posições  $\Delta_A$ ,  $\Delta$ ,  $\Delta_B$ , as superfícies  $A$  e  $B$ , bem como as condições de contorno em ambas as superfícies do sólido. Nesta figura, a seta reta representa o fluxo prescrito, a seta em curva representa a convecção e o círculo, a condição de temperatura prescrita.

### 3.2 MODELO MATEMÁTICO

Partindo do modelo físico apresentado, serão empregadas nesse trabalho as adimensionalizações dadas pelas Eqs. 2.19, 2.22, 2.24, 2.25 e 2.26. A equação de condução, dada pela Eq. 2.27, será utilizada na forma unidimensional e o subscrito da variável espacial será suprimido por questão de comodidade. Assim, a equação de condução de calor em sua forma adimensionalizada pode ser expressa por

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.1)$$



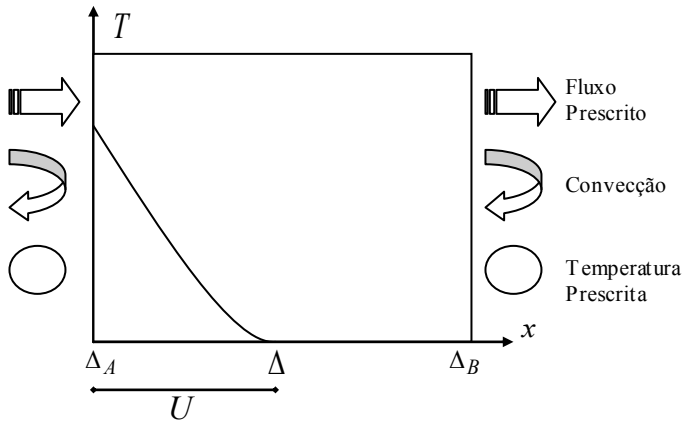


Figura 3-1 – Esquema do modelo físico de condução de calor.

A fronteira  $A$  será considerada a origem da variável espacial, a distância entre as fronteiras  $A$  e  $B$  é a dimensão característica espacial  $L$ , o que determina que a posição da fronteira  $B$  é 1. A posição de penetração do calor,  $\Delta$ , é adimensionalizada e corresponde à variável  $\delta$ .

As condições de contorno são utilizadas na forma geral e adimensional, conforme estabelecido na Tab. 2-2, para o sólido finito:

$$-k_A \frac{\partial \theta}{\partial x} + B_A \theta = f_A \quad \text{em } x=0 \quad (3.2.a)$$

$$k_B \frac{\partial \theta}{\partial x} + B_B \theta = 0 \quad \text{em } x=1 \quad (3.2.b)$$

Para a situação de sólido semi-infinito, a condição de contorno na superfície  $A$  é a mesma dada pela Eq. 3.2.a, já a condição referente ao sólido semi-infinito, é apresentada na forma de limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta = 0 \quad (3.3)$$

Pode ser observado que ambas as condições na superfície  $B$  são homogêneas. No caso de problemas que envolvam não-homogeneidades,

deve-se dividir o problema original em dois problemas, cada um com apenas uma não-homogeneidade. A solução de um problema onde a não-homogeneidade ocorre na superfície  $B$ , será análogo a um problema que apresente a mesma não homogeneidade na superfície  $A$ , substituindo-se a variável  $x$  nas soluções pela expressão  $l-x$ .

### 3.3 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Nesta secção é apresentado o desenvolvimento das soluções matemáticas para o problema proposto na secção 3.1 usando a técnica da transformada integral de Laplace. Serão apresentados desenvolvimentos para os domínios de sólido semi-infinito bem como de sólido finito. No caso do domínio finito a solução será desmembrada em solução de tempo curto e solução de tempo longo, conforme discutido na revisão bibliográfica do método, apresentada no Capítulo 2.

#### 3.3.1 Sólido Semi-Infinito

A solução de sólido semi-infinito é válida para a situação em que o calor imposto ao sólido pela superfície  $A$ , ainda não atingiu a superfície  $B$ . Partindo da equação de condução de calor unidimensional em sua forma adimensional, aqui reproduzida:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.4)$$

e das condições de contorno na forma geral e adimensional para sólido semi-infinito:

$$-k_A \frac{\partial \theta}{\partial x} + B_A \theta = f_A \quad \text{em } x=0 \quad (3.5.a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta = 0 \quad (3.5.b)$$

aplica-se a transformada de Laplace na Eq. (3.4) bem como nas condições de contorno (3.5), obtendo respectivamente

$$s\bar{\theta} + \theta_0 = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} \quad (3.6)$$

e

$$-k_A \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + B_A \bar{\theta} = F_A \quad \text{em } x=0 \quad (3.7.a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta = 0 \quad (3.7.b)$$

onde  $\bar{\theta}$  é a transformada de Laplace da função  $\theta$ ,  $\theta_0$  é a condição inicial (no presente desenvolvimento,  $\theta_0=0$ ) e  $F_A(s)$  é a transformada de Laplace de  $f_A(t)$ . Conforme Spiegel (1973) a equação (3.6) tem como solução:

$$\bar{\theta} = C_1 e^{x\sqrt{s}} + C_2 e^{-x\sqrt{s}} \quad (3.8)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes a serem determinadas. Substituindo a Eq. (3.8) na condição de contorno (3.7.b), resulta em:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{s} \left( C_1 e^{x\sqrt{s}} - C_2 e^{-x\sqrt{s}} \right) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( C_1 e^{x\sqrt{s}} + C_2 e^{-x\sqrt{s}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde se obtêm, em qualquer das condições,  $C_1=0$ . Substituindo essa constante na Eq. (3.8) e essa na Eq. (3.7.a) obtêm-se, respectivamente:

$$\bar{\theta} = C_2 e^{-x\sqrt{s}} \quad (3.10)$$

e

$$k_A \sqrt{s} C_2 + B_A C_2 = F_A \quad (3.11)$$

Isolando-se  $C_2$  na Eq. (3.11) e substituindo na Eq. (3.10) têm-se a seguinte expressão:

$$\bar{\theta} = \frac{F_A e^{-x\sqrt{s}}}{(k_A \sqrt{s} + B_A)} \quad (3.12)$$

A partir destas transformadas particulariza-se o desenvolvimento para o caso de  $f_A(t) = f_0 t^m$  ou seja  $F_A(s) = f_0 \Gamma(m+1)/s^{m+1}$ , obtida em Abramowitz (1972), e onde  $\Gamma$  é a função gamma. Essa transformação, substituída na equação anterior, resulta na expressão:

$$\bar{\theta} = f_0 \Gamma(m+1) \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{m+1} (k_A \sqrt{s} + B_A)} \quad (3.13)$$

### 3.3.1.1 Temperatura Prescrita

Para reconstituir a condição de contorno de temperatura prescrita, deve-se substituir os valores  $k_A = 0$ ,  $B_A = 1$  e  $f_0 = \theta_A$  na Eq. (3.13), obtendo-se a expressão:

$$\bar{\theta} = \theta_A \Gamma(m+1) \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{m+1}} \quad (3.14)$$

Com a inversão da expressão, usando-se uma inversão tabelada em Abramowitz et al. (1972) se obtém como solução

$$\theta = \theta_A \Gamma(m+1) (4\tau)^m \operatorname{erfc} \left( 2m, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right) \quad (3.15)$$

### 3.3.1.2 Fluxo Prescrito

De modo similar ao caso de temperatura prescrita, os valores  $k_A = 1$ ,  $B_A = 0$  e  $f_0 = Q_A$  são substituídos na Eq. (3.13) para reconstituir a condição de contorno de fluxo prescrito obtendo-se:

$$\bar{\theta} = Q_A \Gamma(m+1) \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{m+3/2}} \quad (3.16)$$

Realizando a inversa da transformada, conforme Abramowitz et al. (1972), o resultado obtido é:

$$\theta = Q_A \Gamma(m+1) (4\tau)^{m+1/2} \operatorname{erfc} \left( 2m+1, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right) \quad (3.17)$$

### 3.3.1.3 Convecção

Finalmente, para se reproduzir o caso de convecção, deve-se substituir os valores da Eq. (3.13) por  $k_A=1$ ,  $B_A=Bi$  e  $f_0=Bi\theta_\infty$ , ficando a equação na forma

$$\bar{\theta} = Bi\theta_\infty \Gamma(m+1) \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{m+1}(\sqrt{s} + Bi)} \quad (3.18)$$

Aplicando a transformada inversa encontrada em Abramowitz et al. (1972) chega-se a seguinte expressão:

$$\theta = \frac{\theta_\infty \Gamma(m+1)}{(-Bi)^{2m}} \left( \sum_{r=0}^{2m} (-Bi\sqrt{4\tau})^r \operatorname{erfc} \left( r, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right) - e^{Bi x + Bi^2 \tau} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right) \right) \quad (3.19)$$

### 3.3.2 Sólido Finito

Considera-se sólido finito a situação em que ambas as condições de contorno devem ser consideradas na solução do problema. Como já comentado no Capítulo 2, nesta situação, a solução matemática age sobre todo o domínio do problema, ou seja, não é possível obter uma distribuição de temperaturas que tende a temperatura inicial, à medida

que se distancia da superfície A, mesmo que o calor não tenha sido sentido nesta superfície. Ou seja, não é possível se obter uma solução para sólido infinito utilizando soluções de sólido finito, mesmo que fisicamente esta situação seja verificada. Esta observação é válida tanto para a solução por transformada de Laplace quanto por separação de variáveis, Como se verá na Seção 3.4, o HBIM não apresenta estas restrições, por utilizar o conceito de frente de penetração do calor.

Assim, de forma análoga ao caso de sólido semi-infinito, para o sólido finito inicia-se a solução do problema com a equação de condução de calor unidimensional em sua forma adimensional Eq. (3.4) e as condições de contorno na forma geral e adimensional para sólido finito Eqs. (3.2.a) e (3.2.b).

Aplica-se a transformada de Laplace na Eq. (3.4) bem como nas condições de contorno (3.2), obtendo respectivamente a Eq. (3.6) e

$$-k_A \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + B_A \bar{\theta} = F_A \quad \text{em } x=0 \quad (3.20.a)$$

$$k_B \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + B_B \bar{\theta} = 0 \quad \text{em } x=1 \quad (3.20.b)$$

onde  $\bar{\theta}$  é a transformada de Laplace da função  $\theta$ , e  $\theta_0$  é a condição inicial, que vale zero neste caso. Conforme Spiegel (1973) a equação (3.6) tem como solução a Eq. (3.8) onde  $C_1$  e  $C_2$  são as constantes da solução. A derivada da Eq. (3.8) é dada por

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = \sqrt{s} \left( C_1 e^{x\sqrt{s}} - C_2 e^{-x\sqrt{s}} \right) \quad (3.21)$$

Substituindo as Eqs. (3.8) e (3.21) nas condições de contorno Eqs. (3.20.a) e (3.20.b) obtêm-se

$$-k_A \sqrt{s} (C_1 - C_2) + B_A (C_1 + C_2) = F_A \quad (3.22.a)$$

$$k_B \sqrt{s} (C_1 e^{\sqrt{s}} - C_2 e^{-\sqrt{s}}) + B_B (C_1 e^{\sqrt{s}} + C_2 e^{-\sqrt{s}}) = 0 \quad (3.22.b)$$

Isolando-se os coeficientes na Eq. (3.22) têm-se após manipulação algébrica as seguintes expressões

$$-(k_A\sqrt{s} - B_A)C_1 + (k_A\sqrt{s} + B_A)C_2 = F_A \quad (3.23.a)$$

$$C_1 = C_2 \frac{e^{-\sqrt{s}}(k_B\sqrt{s} - B_B)}{e^{\sqrt{s}}(k_B\sqrt{s} + B_B)} \quad (3.23.b)$$

Substituindo a expressão (3.23.b) em (3.23.a) obtêm-se

$$\left( (k_A\sqrt{s} + B_A) - (k_A\sqrt{s} - B_A) \frac{(k_B\sqrt{s} - B_B)e^{-\sqrt{s}}}{(k_B\sqrt{s} + B_B)e^{\sqrt{s}}} \right) C_2 = F_A \quad (3.24)$$

A partir dessa expressão duas situações podem ser consideradas: uma vai levar a uma solução de tempo curto e a outra para a solução de tempo longo, conforme apresentado no capítulo 2. Estas situações serão consideradas nesta ordem a seguir.

### 3.3.2.1 Solução de tempo longo

Resolvendo a equação (3.24) para a constante  $C_2$ , a seguinte expressão é obtida:

$$C_2 = \frac{F_A (k_B\sqrt{s} + B_B) e^{\sqrt{s}}}{\left( (k_A\sqrt{s} + B_A) (k_B\sqrt{s} + B_B) e^{\sqrt{s}} - (k_A\sqrt{s} - B_A) (k_B\sqrt{s} - B_B) e^{-\sqrt{s}} \right)} \quad (3.25)$$

Substituindo as Eqs. (3.25) e (3.23.a) na Eq. (3.8) a expressão abaixo é obtida após algum algebrismo:

$$\bar{\theta} = F_A \frac{\left( (k_B\sqrt{s} + B_B) e^{(1-x)\sqrt{s}} + (k_B\sqrt{s} - B_B) e^{-(1-x)\sqrt{s}} \right)}{\left( (k_A\sqrt{s} + B_A) (k_B\sqrt{s} + B_B) e^{\sqrt{s}} - (k_A\sqrt{s} - B_A) (k_B\sqrt{s} - B_B) e^{-\sqrt{s}} \right)} \quad (3.26)$$

A expressão anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\bar{\theta} = F_A \frac{k_B \sqrt{s} \left( e^{(1-x)\sqrt{s}} + e^{-(1-x)\sqrt{s}} \right) + B_B \left( e^{(1-x)\sqrt{s}} - e^{-(1-x)\sqrt{s}} \right)}{(k_A k_B s + B_A B_B) \left( e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}} \right) + (k_A \sqrt{s} B_B + B_A k_B \sqrt{s}) \left( e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}} \right)} \quad (3.27)$$

Empregando-se as definições de funções hiperbólicas ( $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$  e  $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ ) a equação anterior pode ser re-escrita na forma:

$$\bar{\theta} = F_A \frac{k_B \sqrt{s} \cosh\left((1-x)\sqrt{s}\right) + B_B \sinh\left((1-x)\sqrt{s}\right)}{(k_A k_B s + B_A B_B) \sinh\left(\sqrt{s}\right) + (k_A B_B + B_A k_B) \sqrt{s} \cosh\left(\sqrt{s}\right)} \quad (3.28)$$

Reescrevendo a expressão (3.28) no formato  $\bar{\theta} = F_A \bar{\varphi}$  pode-se obter uma solução do problema empregando-se a técnica de convolução, conforme apresentado por Meyers (1998), uma vez que se conheça a transformada inversa de  $\bar{\varphi}$ . Para tanto, a partir do teorema de expansão (ver Tabela 2-3) e para:

$$\Phi(s) = k_B \sqrt{s} \cosh\left((1-x)\sqrt{s}\right) + B_B \sinh\left((1-x)\sqrt{s}\right) \quad (3.29)$$

e

$$\psi(s) = (k_A k_B s + B_A B_B) \sinh\left(\sqrt{s}\right) + (k_A B_B + B_A k_B) \sqrt{s} \cosh\left(\sqrt{s}\right) \quad (3.30)$$

tendo-se a derivada de  $\psi(s)$ :



$$\psi'(s) = (2k_A k_B + k_A B_B + B_A k_B) \frac{\sinh(\sqrt{s})}{2} + (k_A k_B s + B_A B_B + k_A B_B + B_A k_B) \frac{\cosh(\sqrt{s})}{2\sqrt{s}} \quad (3.31)$$

pode-se obter as raízes de  $\psi(s)$ , ou seja:

$$(k_A k_B s + B_A B_B) \sinh(\sqrt{s}) + (k_A B_B + B_A k_B) \sqrt{s} \cosh(\sqrt{s}) = 0 \quad (3.32)$$

Da relação entre as funções hiperbólicas e trigonométricas (Spiegel, 1973) têm-se que  $\sinh(x) = \text{sen}(ix)/i$  e  $\cosh(x) = \cos(ix)$ , de forma que a Eq. (3.32) pode ser reescrita, após ser multiplicada por  $i$ , como:

$$(k_A k_B s + B_A B_B) \sin(i\sqrt{s}) = -(k_A B_B + B_A k_B) i \sqrt{s} \cos(i\sqrt{s}) \quad (3.33)$$

Denominando-se  $i\sqrt{s_n}$  como autovalores  $\lambda_n$ , estes podem ser obtidos a partir das raízes da seguinte equação transcendental:

$$(k_A k_B \lambda_n^2 - B_A B_B) \sin(\lambda_n) = (k_A B_B + B_A k_B) \lambda_n \cos(\lambda_n) \quad (3.34)$$

Aplicando-se assim o teorema da expansão, a transformada inversa de  $\bar{\varphi}$  é obtida:

$$\varphi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{s_n \tau} \frac{\left( k_B \sqrt{s} \cosh \left( (1-x) \sqrt{s_n} \right) + B_B \sinh \left( (1-x) \sqrt{s_n} \right) \right)}{\left( \left( 2k_A k_B + k_A B_B + B_A k_B \right) \sinh \left( \sqrt{s_n} \right) \right.} \quad (3.35)$$

$$\left. + \left( k_A k_B s + B_A B_B + k_A B_B + B_A k_B \right) \frac{\cosh \left( \sqrt{s_n} \right)}{\sqrt{s_n}} \right)$$

Substituindo  $i\sqrt{s} = \lambda_n$ , inserindo as relações de funções hiperbólicas e trigonométricas e multiplicando o numerador e denominador por  $\lambda_n^2$ , esta última equação pode ser reescrita no formato:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n} \frac{\left( k_B \lambda_n \cos \left( (1-x) \lambda_n \right) + B_B \sin \left( (1-x) \lambda_n \right) \right) \left( \lambda_n^2 e^{-\lambda_n^2 \tau} \right)}{\left( \left( 2k_A k_B + k_A B_B + B_A k_B \right) \lambda_n \sin \left( \lambda_n \right) - \left( B_A B_B + k_A B_B + B_A k_B - k_A k_B \lambda_n^2 \right) \cos \left( \lambda_n \right) \right)} \quad (3.36)$$

Lembrando que  $\bar{\theta} = F_A \bar{\varphi}$ , finalmente pode-se utilizar a propriedade da convolução para escrever

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n} \frac{\left( k_B \lambda_n \cos \left( (1-x) \lambda_n \right) + B_B \sin \left( (1-x) \lambda_n \right) \right) \left( e^{-\lambda_n^2 \tau} \int_0^{\tau} f_A(u) \lambda_n^2 e^{\lambda_n^2 u} du \right)}{\left( \left( 2k_A k_B + k_A B_B + B_A k_B \right) \lambda_n \sin \left( \lambda_n \right) - \left( B_A B_B + k_A B_B + B_A k_B - k_A k_B \lambda_n^2 \right) \cos \left( \lambda_n \right) \right)} \quad (3.37)$$

onde  $u$  é a variável de integração. Particularizando para a situação de  $f_A(t) = f_0 t^m$ , é possível determinar a integral, ou seja:

$$\int_0^{\tau} e^{\lambda_n^2 u} u^m \lambda_n^2 du = \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_n^{2m}} \int_0^{\tau} e^{-(-\lambda_n^2 u)} (-\lambda_n^2 u)^m d(-\lambda_n^2 u) \quad (3.38)$$

fazendo a substituição  $-\lambda_n^2 u = \beta$  têm-se a expressão:

$$\frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_n^{2m}} \int_0^{-\lambda_n^2 \tau} e^{-\beta} \beta^m d\beta = \frac{(-1)^{m+1} \Gamma(m+1)}{\lambda_n^{2m}} P(m+1, -\lambda_n^2 \tau) \quad (3.39)$$

onde  $P(m+1, -\lambda_n^2 \tau)$  é a função Gamma incompleta, que pode ser expandida em série na forma  $1 + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k+1} \lambda_n^{2k} \tau^k}{k!} e^{\lambda_n^2 \tau}$ , conforme Abramowitz (1972).

Substituindo o lado direito da expressão (3.39) na Eq. (3.37) e a expansão da função Gamma incompleta têm-se:

$$\theta = f_0 \Gamma(m+1) \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_n^{2m+1}} \frac{\left( k_B \lambda_n \cos((1-x)\lambda_n) + B_B \sin((1-x)\lambda_n) \right) \left( e^{-\lambda_n^2 \tau} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k+1} \lambda_n^{2k} \tau^k}{k!} \right)}{\left( (2k_A k_B + k_A B_B + B_A k_B) \lambda_n \sin(\lambda_n) - (B_A B_B + k_A B_B + B_A k_B - k_A k_B \lambda_n^2) \cos(\lambda_n) \right)} \quad (3.40)$$

onde o autovalor é dado pela Eq. (3.34). A expressão (3.40) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \theta = & f_0 \Gamma(m+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \frac{2(-1)^{m+1} e^{-\lambda_n^2 \tau}}{\lambda_n^{2m+1}} \right) \left( k_B \lambda_n \cos((1-x)\lambda_n) + B_B \sin((1-x)\lambda_n) \right)}{\left( (2k_A k_B + k_A B_B + B_A k_B) \lambda_n \sin(\lambda_n) - (B_A B_B + k_A B_B + B_A k_B - k_A k_B \lambda_n^2) \cos(\lambda_n) \right)} \\ & + f_0 \Gamma(m+1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{\left( \frac{2(-1)^{m+k} \tau^k}{\lambda_n^{2(m-k)+1} k!} \right) \left( k_B \lambda_n \cos((1-x)\lambda_n) + B_B \sin((1-x)\lambda_n) \right)}{\left( (2k_A k_B + k_A B_B + B_A k_B) \lambda_n \sin(\lambda_n) - (B_A B_B + k_A B_B + B_A k_B - k_A k_B \lambda_n^2) \cos(\lambda_n) \right)} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Nesta expressão, o primeiro somatório do lado direito é responsável pela característica transiente da solução enquanto que o segundo somatório representa a solução em regime permanente. Outro importante aspecto é que, embora essa solução agregue as mais diferentes combinações de fronteiras, existe a limitação que  $m$  seja um valor inteiro devido à natureza dos somatórios envolvidos. Essa solução é matematicamente idêntica à obtida pelo método de separação de variáveis e aplicando o teorema de Duhamel, conforme apresentado em Arpaci (1966).

Particularizando para cada uma das possíveis combinações de condições de contorno, têm-se:

### 3.3.2.1.1 Temperatura Prescrita/Temperatura Prescrita:

Na combinação temperatura prescrita nas superfícies A e B, os valores  $k_A=0$ ,  $k_B=0$ ,  $B_A=1$ ,  $B_B=1$  e  $f_0=\theta_A$  (ver Tabela 2.2) são utilizados para a reconstrução das condições de contorno. Assim, o autovalor (Eq. 3.34) é obtido a partir da solução da expressão  $\sin(\lambda_n)=0$ , i.e,  $\lambda_n=n\pi$  e a solução, dada a partir da Eq. 3.41, é:

$$\theta=\theta_A \Gamma(m+1) \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{m+n}}{(n\pi)^{2m+1}} \sin((1-x)n\pi) \left( e^{-n^2 \pi^2 \tau} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k+1} (n\pi)^{2k} \tau^k}{k!} \right) \quad (3.42)$$

### 3.3.2.1.2 Temperatura Prescrita/Fluxo Prescrito:

Para reproduzir as condições de temperatura prescrita na superfície A e fluxo prescrito na superfície B, os valores  $k_A=0$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=1$ ,  $B_B=0$  e  $f_0=\theta_A$  são usados, combinando-se com o autovalor, obtido a partir da Eq. 3.34, dado por  $\cos(\lambda_n)=0$ , i.e,  $\lambda_n=(2n+1)\pi/2$ . Assim, a solução tem a forma:

$$\theta=\theta_A \Gamma(m+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{m+1} (-1)^{m+n}}{((2n+1)\pi)^{2m+1}} \cos\left((1-x)\frac{(2n+1)}{2}\pi\right) \left( e^{-\frac{(2n+1)^2}{4} \pi^2 \tau} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k+1} \tau^k}{k!} \left(\frac{(2n+1)}{2}\pi\right)^{2k} \right) \quad (3.43)$$

### 3.3.2.1.3 Temperatura Prescrita/Convecção:

Aqui as condições de contorno de temperatura prescrita na superfície A e convecção na superfície B são reconstituídas usando-se  $k_A=0$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=1$ ,  $B_B=Bi$  e  $f_0=\theta_A$ . Nesta situação o autovalor, dado pela equação transcendental:  $-Bi \sin(\lambda_n) = \lambda_n \cos(\lambda_n)$ , precisa ser obtido numericamente. Já a solução geral, vinda da Eq. 3.45, é:

$$\theta = \theta_A \Gamma(m+1) \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_n^{2m+1}} \frac{(\lambda_n \cos((1-x)\lambda_n) + Bi \sin((1-x)\lambda_n))}{\lambda_n \sin(\lambda_n) - (Bi+1)\cos(\lambda_n)} \left( e^{-\lambda_n^2 \tau} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k+1} \lambda_n^{2k} \tau^k}{k!} \right) \quad (3.44)$$

### 3.3.2.1.4 Fluxo Prescrito/Temperatura Prescrita:

A solução do problema cujas condições de contorno são fluxo prescrito na superfície A e temperatura prescrita na superfície B, são obtidas usando-se os valores  $k_A=1$ ,  $k_B=0$ ,  $B_A=0$ ,  $B_B=1$  e  $f_0=Q_A$ . Os autovalores para este caso são dados por  $\cos(\lambda_n)=0$ , i.e,  $\lambda_n=(2n+1)\pi/2$ . A solução então é apresentada na forma:

$$\theta = Q_A \Gamma(m+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2m+3} (-1)^{m+n}}{((2n+1)\pi)^{2m+2}} \sin\left((1-x) \frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \left( e^{-\frac{(2n+1)^2}{4} \pi^2 \tau} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k+1} \tau^k}{k!} \left( \frac{(2n+1)\pi}{2} \right)^{2k} \right) \quad (3.45)$$

### 3.3.2.1.5 Fluxo Prescrito/Fluxo Prescrito:

Já para as condições de fluxo prescrito em ambas as superfícies, a solução geral do problema é reproduzida para substituição dos parâmetros pelos valores  $k_A=1$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=0$ ,  $B_B=0$  e  $f_0=Q_A$ , para autovalores obtidos pela expressão  $\sin(\lambda_n)=0$ , i.e,  $\lambda_n=n\pi$ , sendo dada por:

$$\theta=Q_A \Gamma(m+1) \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{m+n+1}}{(n\pi)^{2m+2}} \cos((1-x)n\pi) \left( e^{-n^2 \pi^2 \tau} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k+1} (n\pi)^{2k} \tau^k}{k!} \right) \quad (3.46)$$

### 3.3.2.1.6 Fluxo Prescrito/Convecção:

As condições de fluxo prescrito para a superfície A e convecção para a superfície B são obtidas considerando-se os valores  $k_A=1$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=0$ ,  $B_B=Bi$  e  $f_0=Q_A$ . Já o autovalor é calculado pela expressão transcendental  $\lambda_n \sin(\lambda_n) = Bi \cos(\lambda_n)$  e precisa ser obtido numericamente. Desta forma, a solução geral pode ser dada forma:

$$\theta=Q_A \Gamma(m+1) \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_n^{2m+1}} \frac{(\lambda_n \cos((1-x)\lambda_n) + Bi \sin((1-x)\lambda_n)) \left( e^{-\lambda_n^2 \tau} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k+1} \lambda_n^{2k} \tau^k}{k!} \right)}{\left( (2+Bi)\lambda_n \sin(\lambda_n) - (Bi - \lambda_n^2) \cos(\lambda_n) \right)} \quad (3.47)$$

### 3.3.2.1.7 Convecção/Temperatura Prescrita:

Para o caso de convecção na superfície A e temperatura prescrita na superfície B, para se obter a solução, deve-se considerar os seguintes parâmetros:  $k_A=1$ ,  $k_B=0$ ,  $B_A=Bi$ ,  $B_B=1$  e  $f_0=Bi\theta_\infty$ . Os autovalores são calculados numericamente a partir da expressão  $-Bi \sin(\lambda_n) = \lambda_n \cos(\lambda_n)$ . Desta forma, a solução geral é expressa por:

$$\theta = Bi\theta_\infty \Gamma(m+1) \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{m+1} \sin((1-x)\lambda_n)}{\lambda_n^{2m+1}} \left( e^{-\lambda_n^2 \tau} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k+1} \lambda_n^{2k} \tau^k}{k!} \right) \frac{1}{(\lambda_n \sin(\lambda_n) - (Bi+1)\cos(\lambda_n))} \quad (3.48)$$

### 3.3.2.1.8 Convecção/Fluxo Prescrito:

Para as condições de convecção na superfície A e fluxo prescrito na superfície B, deve-se substituir os parâmetros  $k_A=1$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=Bi$ ,  $B_B=0$  e  $f_0=Bi\theta_\infty$  nas equações gerais. Os autovalores são numericamente calculados pela expressão transcendental  $\lambda_n \sin(\lambda_n) = Bi \cos(\lambda_n)$ . A solução tem a forma:

$$\theta = Bi\theta_\infty \Gamma(m+1) \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{m+1} \cos((1-x)\lambda_n)}{\lambda_n^{2m}} \left( e^{-\lambda_n^2 \tau} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k+1} \lambda_n^{2k} \tau^k}{k!} \right) \frac{1}{((2+Bi)\lambda_n \sin(\lambda_n) - (Bi - \lambda_n^2)\cos(\lambda_n))} \quad (3.49)$$



### 3.3.2.1.9 Convecção/Convecção:

Finalmente, para as condições de convecção em ambas as superfícies do sólido, os parâmetros assumem os seguintes valores:  $k_A=1$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=Bi$ ,  $B_B=Bi$  e  $f_0=Bi\theta_\infty$ . Os autovalores são determinados a partir da solução numérica da expressão  $(\lambda_n^2 - Bi^2)\sin(\lambda_n) = 2\lambda_n Bi \cos(\lambda_n)$ , sendo que a solução geral é:

$$\theta = Bi\theta_\infty \Gamma(m+1) \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_n^{2m+1}} \frac{(\lambda_n \cos((1-x)\lambda_n) + Bi \sin((1-x)\lambda_n)) \left( e^{-\lambda_n^2 \tau} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k+1} \lambda_n^{2k} \tau^k}{k!} \right)}{(2(1+Bi)\lambda_n \sin(\lambda_n) - (Bi^2 + 2Bi - \lambda_n^2) \cos(\lambda_n))} \quad (3.50)$$

### 3.3.2.2 Solução de tempo curto

Nesta subsecção serão tratados os problemas de tempo curto. Para este caso, será conveniente escrever a expressão para a constante  $C_2$  empregando a solução alternativa, obtida a partir da solução equação (3.24):

$$C_2 = \frac{F_A}{(k_A \sqrt{s} + B_A)} \left/ \left( 1 - \frac{(k_A \sqrt{s} - B_A)}{(k_A \sqrt{s} + B_A)} \frac{(k_B \sqrt{s} - B_B)}{(k_B \sqrt{s} + B_B)} e^{-2\sqrt{s}} \right) \right. \quad (3.51)$$

Substituindo as Eqs. (3.51) e (3.23.a) na Eq. (3.20), a expressão abaixo é obtida:

$$\bar{\theta} = \frac{F_A \left( \frac{k_B \sqrt{s} - B_B}{k_B \sqrt{s} + B_B} e^{-(2-x)\sqrt{s}} + e^{-x\sqrt{s}} \right)}{\left( k_A \sqrt{s} + B_A \right) \left( 1 - \frac{k_A \sqrt{s} - B_A}{k_A \sqrt{s} + B_A} \frac{k_B \sqrt{s} - B_B}{k_B \sqrt{s} + B_B} e^{-2\sqrt{s}} \right)} \quad (3.52)$$

Expandindo-se o denominador da equação anterior em séries binomiais (Abramowitz, 1972) pode-se se reescrever:

$$\frac{1}{\left( 1 - \frac{k_A \sqrt{s} - B_A}{k_A \sqrt{s} + B_A} \frac{k_B \sqrt{s} - B_B}{k_B \sqrt{s} + B_B} e^{-2\sqrt{s}} \right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{k_A \sqrt{s} - B_A}{k_A \sqrt{s} + B_A} \frac{k_B \sqrt{s} - B_B}{k_B \sqrt{s} + B_B} \right)^n e^{-2n\sqrt{s}} \quad (3.53)$$

Esta expressão substituída na equação original resulta, após algum algebrismo em:

$$\bar{\theta} = F_A \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{k_A \sqrt{s} + B_A} + F_A \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{k_A \sqrt{s} - B_A}{k_A \sqrt{s} + B_A} \frac{k_B \sqrt{s} - B_B}{k_B \sqrt{s} + B_B} \right)^n \left( \frac{e^{-(2n+x)\sqrt{s}}}{k_A \sqrt{s} + B_A} + \frac{e^{-(2n-x)\sqrt{s}}}{k_A \sqrt{s} - B_A} \right) \quad (3.54)$$

Para a obtenção da solução da distribuição de temperaturas, é necessário proceder a inversão da Eq. (3.54). Para isto, as duas transformadas apresentadas a seguir, foram desenvolvidas, conforme apresentado no Anexo I. São estas:

$$L^{-1} \left[ \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{(m+1)/2}} \right] = (\sqrt{4\tau})^{m-1} \operatorname{erfc} \left( m-1, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right) \quad (3.55)$$

e

$$L^{-1} \left[ \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{(m+1)/2} (\sqrt{s} + Bi)^k} \right] = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \Gamma(m+j) (\sqrt{4\tau})^{(k-j-1)}}{\Gamma(m) \Gamma(j+1) Bi^{(j+m)}} \left( e^{Bi x + Bi^2 \tau} \operatorname{erfc} \left( k-j-1, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} + Bi \sqrt{\tau} \right) - \sum_{r=0}^{m+j-1} \frac{\Gamma(k-j+r)}{\Gamma(k-j) \Gamma(r+1)} (-Bi \sqrt{4\tau})^r \operatorname{erfc} \left( k-j+r-1, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right) \right) \quad (3.56)$$

onde  $\operatorname{erfc}(a, b)$  é a função de integral repetitiva da função erro, conforme apresentado em Abramowitz (1972), onde o coeficiente  $a$  é o número de integrações e  $b$  é o argumento da função. Normalmente a notação  $i^a \operatorname{erfc}(b)$  é usada,

mas a notação apresentada foi utilizada por comodidade de leitura e interpretação dos coeficientes da mesma. A partir destas transformadas, particulariza-se o desenvolvimento para o caso de  $f_A(t)=f_0 t^m$ , cuja transformada de Laplace é  $F_A(s)=f_0 \Gamma(m+1)/s^{m+1}$ . A seguir apresentam-se as soluções do problema de tempo curto, sujeito as várias combinações de condições de contorno.

### 3.3.2.2.1 Temperatura Prescrita/Temperatura Prescrita:

Para a combinação temperaturas prescritas nas superfícies A, deve-se adotar os seguintes valores para as constantes  $k_A=0$ ,  $k_B=0$ ,  $B_A=1$ ,  $B_B=1$  e  $f_0=\theta_A$  de forma que a solução, conforme a Eq. (3.54), pode ser expressa como:

$$\bar{\theta} = \theta_A \Gamma(m+1) \left( \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{m+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{e^{-(2n+x)\sqrt{s}}}{s^{m+1}} - \frac{e^{-(2n-x)\sqrt{s}}}{s^{m+1}} \right) \right) \quad (3.57)$$

Aplicando-se a transformada inversa dada na Eq. (3.56) o resultado final é:

$$\theta = \theta_A \Gamma(m+1) (4\tau)^m \left( \operatorname{erfc} \left( 2m, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{erfc} \left( 2m, \frac{(2n+x)}{\sqrt{4\tau}} \right) - \operatorname{erfc} \left( 2m, \frac{(2n-x)}{\sqrt{4\tau}} \right) \right) \right) \quad (3.58)$$

### 3.3.2.2.2 Temperatura Prescrita/Fluxo Prescrito:

Os valores  $k_A=0$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=1$ ,  $B_B=0$  e  $f_0=\theta_A$  são usados para a solução do problema de condução unidimensional sujeito a condição de temperatura prescrita na superfície A e fluxo prescrito na superfície B. Assim, depois das devidas substituições, a Eq.(3.54) pode ser expressa como:

$$\bar{\theta} = \theta_A \Gamma(m+1) \left( \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{m+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{e^{-(2n+x)\sqrt{s}}}{s^{m+1}} - \frac{e^{-(2n-x)\sqrt{s}}}{s^{m+1}} \right) \right) \quad (3.59)$$

Aplicando-se a transformada inversa dada por (3.55) o resultado final é:

$$\theta = \theta_A \Gamma(m+1) (4\tau)^m \left( \operatorname{erfc} \left( 2m, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \operatorname{erfc} \left( 2m, \frac{(2n+x)}{\sqrt{4\tau}} \right) - \operatorname{erfc} \left( 2m, \frac{(2n-x)}{\sqrt{4\tau}} \right) \right) \right) \quad (3.60)$$

### 3.3.2.2.3 Temperatura Prescrita/Convecção:

Para a combinação de condições de contorno temperatura prescrita na superfície A e convecção na superfície B substitui-se os seguintes valores na Eq. 4.55:  $k_A=0$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=1$ ,  $B_B=Bi$  e  $f_0=\theta_A$ , que pode ser reescrita como:

$$\bar{\theta} = \frac{\theta_A \Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \left( e^{-x\sqrt{s}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\sqrt{s} - Bi}{\sqrt{s} + Bi} \right)^n \left( e^{-(2n+x)\sqrt{s}} - e^{-(2n-x)\sqrt{s}} \right) \right) \quad (3.61)$$

Expande-se o termo interno do somatório em séries binomiais (Abramowitz, 1972) obtendo a expressão no formato:

$$\bar{\theta} = \theta_A \Gamma(m+1) \left( \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{m+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(n+1)(-1)^{n+j} (2Bi)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)} \left( \frac{e^{-(2n+x)\sqrt{s}}}{s^{m+1}(\sqrt{s} + Bi)^j} - \frac{e^{-(2n-x)\sqrt{s}}}{s^{m+1}(\sqrt{s} + Bi)^j} \right) \right) \quad (3.62)$$

Aplicando-se as transformadas inversas dadas em (3.55) e (3.56) o resultado final é:

$$\begin{aligned}
\theta = & \theta_A \Gamma(m+1) (4\tau)^m \operatorname{erfc} \left( 2m, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^n \sum_{p=0}^{j-1} \left( \theta_A \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)\Gamma(2m+1+p)}{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)\Gamma(2m+1)\Gamma(p+1)} \frac{(-1)^{2m+n+j} 2^{(2j-p-1)} (\sqrt{\tau})^{(j-p-1)}}{Bi^{(p+2m+1-j)}} \right. \\
& \left. \left( \sum_{r=0}^{2m+p} \frac{\Gamma(j-p+r) (-2Bi\sqrt{\tau})^r}{\Gamma(j-p)\Gamma(r+1)} \left( \operatorname{erfc} \left( j-p+r-1, \frac{(2n+x)}{\sqrt{4\tau}} \right) - \operatorname{erfc} \left( j-p+r-1, \frac{(2n-x)}{\sqrt{4\tau}} \right) \right) \right) \right. \\
& \left. \left. - e^{Bix+Bi^2\tau} \left( \operatorname{erfc} \left( j-p-1, \frac{(2n+x)}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right) - \operatorname{erfc} \left( j-p-1, \frac{(2n-x)}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right) \right) \right) \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.63}$$

### 3.3.2.2.4 Fluxo Prescrito/Temperatura Prescrita:

Para a combinação fluxo de calor prescrito na superfície A e temperatura prescrita na superfície B, os parâmetros  $k_A=1$ ,  $k_B=0$ ,  $B_A=0$ ,  $B_B=1$  e  $f_0=Q_A$  são substituídas na Eq. (3.58) resultando em:

$$\bar{\theta} = Q_A \Gamma(m+1) \left( \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{m+3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{e^{-(2n+x)\sqrt{s}}}{s^{m+3/2}} + \frac{e^{-(2n-x)\sqrt{s}}}{s^{m+3/2}} \right) \right) \tag{3.64}$$

A solução é obtida pela aplicação da transformada inversa, dada Eq. (3.59) obtendo-se:

$$\theta = Q_A \Gamma(m+1) (4\tau)^{m+1/2} \left( \operatorname{erfc} \left( 2m+1, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \operatorname{erfc} \left( 2m+1, \frac{(2n+x)}{\sqrt{4\tau}} \right) + \operatorname{erfc} \left( 2m+1, \frac{(2n-x)}{\sqrt{4\tau}} \right) \right) \right) \quad (3.65)$$

### 3.3.2.2.5 Fluxo Prescrito/Fluxo Prescrito:

A distribuição de temperaturas para o caso cujas condições de contorno são de fluxo de calor prescrito em ambas as superfícies do sólido é obtida pelo emprego dos parâmetros:  $k_A=1$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=0$ ,  $B_B=0$  e  $f_0=Q_A$  na Eq. 3.54, resultando em:

$$\bar{\theta} = Q_A \Gamma(m+1) \left( \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{m+3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{e^{-(2n+x)\sqrt{s}}}{s^{m+3/2}} + \frac{e^{-(2n-x)\sqrt{s}}}{s^{m+3/2}} \right) \right) \quad (3.66)$$

A transformada inversa, obtida pelo emprego da Eq. (3.54), é então aplicada obtendo-se:

$$\theta = Q_A \Gamma(m+1) (4\tau)^{m+1/2} \left( \operatorname{erfc} \left( 2m+1, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{erfc} \left( 2m+1, \frac{(2n+x)}{\sqrt{4\tau}} \right) + \operatorname{erfc} \left( 2m+1, \frac{(2n-x)}{\sqrt{4\tau}} \right) \right) \right) \quad (3.67)$$



### 3.3.2.2.6 Fluxo Prescrito/Convecção:

Usa-se os parâmetros  $k_A=1$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=0$ ,  $B_B=Bi$  e  $f_0=Q_A$  na Eq. (4.51), para obter a equação da distribuição de temperatura transformada do caso: fluxo de calor prescrita na superfície A e convecção na superfície B obtendo-se:

$$\bar{\theta} = \frac{Q_A \Gamma(m+1)}{s^{m+3/2}} \left( e^{-x\sqrt{s}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(\sqrt{s} - B_B)}{(\sqrt{s} + Bi)} \right)^n \left( e^{-(2n+x)\sqrt{s}} + e^{-(2n-x)\sqrt{s}} \right) \right) \quad (3.68)$$

Expande-se o termo interno do somatório em séries binomiais. A equação anterior é reescrita no formato:

$$\bar{\theta} = Q_A \Gamma(m+1) \left( \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{m+3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(n+1)(-2Bi)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)} \left( \frac{e^{-(2n+x)\sqrt{s}}}{s^{m+3/2}(\sqrt{s} + Bi)^j} + \frac{e^{-(2n-x)\sqrt{s}}}{s^{m+3/2}(\sqrt{s} + Bi)^j} \right) \right) \quad (3.69)$$

A inversa desta equação pode ser obtida com a aplicação das transformadas inversas dadas em (3.55) e (3.56) obtendo-se:

$$\theta = Q_A \Gamma(m+1) (4\tau)^{m+1/2} \operatorname{erfc} \left( 2m+1, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^n \sum_{p=0}^{j-1} \left( \frac{Q_A \Gamma(m+1) \Gamma(n+1) \Gamma(2m+2+p)}{\Gamma(j+1) \Gamma(n-j+1) \Gamma(2m+2) \Gamma(p+1)} \frac{(-1)^{2m+1+j} 2^{(2j-p-1)} (\sqrt{\tau})^{(j-p-1)}}{Bi^{(p+2m+2-j)}} \left( \sum_{r=0}^{2m+1+p} \frac{\Gamma(j-p+r)}{\Gamma(j-p)\Gamma(r+1)} (-Bi\sqrt{4\tau})^r \left( \operatorname{erfc} \left( j-p+r-1, \frac{(2n+x)}{\sqrt{4\tau}} \right) + \operatorname{erfc} \left( j-p+r-1, \frac{(2n-x)}{\sqrt{4\tau}} \right) \right) - e^{Bi x + Bi^2 \tau} \left( \operatorname{erfc} \left( j-p-1, \frac{(2n+x)}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right) + \operatorname{erfc} \left( j-p-1, \frac{(2n+x)}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right) \right) \right) \right) \quad (3.70)$$

### 3.3.2.2.7 Convecção/Temperatura Prescrita:

A combinação das condições convecção na superfície A e temperatura prescrita na superfície B resulta na distribuição de temperatura obtida a partir da Eq. 3.54, após a substituição dos seguintes valores para os coeficientes:  $k_A=1$ ,  $k_B=0$ ,  $B_A=Bi$ ,  $B_B=1$  e  $f_0=Bi\theta_\infty$ :

$$\bar{\theta} = \frac{Bi\theta_\infty \Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \left( \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{(\sqrt{s}+Bi)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{(\sqrt{s}-Bi)}{(\sqrt{s}+Bi)} \right)^n \left( \frac{e^{-(2n+x)\sqrt{s}}}{(\sqrt{s}+Bi)} + \frac{e^{-(2n-x)\sqrt{s}}}{(\sqrt{s}-Bi)} \right) \right) \quad (3.71)$$

Como já feito anteriormente, expande-se o termo interno do somatório em séries binomiais e distribui-se o somatório obtendo-se a seguinte expressão:

$$\bar{\theta} = Bi \theta_{\infty} \Gamma(m+1) \left( \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{m+1}(\sqrt{s} + Bi)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n+j} \Gamma(n+1) (2Bi)^j}{\Gamma(j+1) \Gamma(n-j+1)} \frac{e^{-(2n+x)\sqrt{s}}}{s^{m+1}(\sqrt{s} + Bi)^{j+1}} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{q=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+q} \Gamma(n) (2Bi)^q}{\Gamma(q+1) \Gamma(n-q)} \frac{e^{-(2n-x)\sqrt{s}}}{s^{m+1}(\sqrt{s} + Bi)^{q+1}} \right) \right) \quad (3.72)$$

Nessa expressão são aplicadas as transformadas inversas dadas em (3.55) e (3.56). Feita a transformada inversa, após alguma manipulação, a expressão pode ser reorganizada tendo como resultado final:

$$\begin{aligned}
\theta = & \theta_{\infty} \Gamma(m+1) \left( \sum_{r=0}^{2m} \frac{(-Bi\sqrt{4\tau})^r}{(-Bi)^{(2m)}} \operatorname{erfc} \left( r+1, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right) - \frac{e^{Bi x + Bi^2 \tau}}{(-Bi)^{(2m)}} \operatorname{erfc} \left( 1, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right) \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^n \sum_{p=0}^j \left( \frac{\theta_{\infty} \Gamma(m+1) \Gamma(n+1) \Gamma(2m+1+p) (-1)^{2m+n+j} 2^{2j-p} \sqrt{\tau}^{(j-p)}}{\Gamma(j+1) \Gamma(n-j+1) \Gamma(2m+1) \Gamma(p+1) Bi^{(p+2m-j)}} \right. \\
& \quad \left. \left( \sum_{r=0}^{2m+p} \frac{\Gamma(j+1-p+r) (-2Bi\sqrt{\tau})^r}{\Gamma(j+1-p) \Gamma(r+1)} \operatorname{erfc} \left( j-p+r, \frac{(2n+x)}{\sqrt{4\tau}} \right) \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - e^{Bi x + Bi^2 \tau} \operatorname{erfc} \left( j-p, \frac{(2n+x)}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right) \right) \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{p=0}^q \left( \frac{\theta_{\infty} \Gamma(m+1) \Gamma(n) \Gamma(2m+1+p) (-1)^{2m+n+q} 2^{2q-p} (\sqrt{\tau})^{(q-p)}}{\Gamma(q+1) \Gamma(n-q) \Gamma(2m+1) \Gamma(p+1) Bi^{(p+2m-q)}} \right. \\
& \quad \left. \left( \sum_{r=0}^{2m+p} \frac{\Gamma(q+1-p+r) (-Bi\sqrt{4\tau})^r}{\Gamma(q+1-p) \Gamma(r+1)} \operatorname{erfc} \left( q-p+r, \frac{(2n-x)}{\sqrt{4\tau}} \right) \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - e^{Bi x + Bi^2 \tau} \operatorname{erfc} \left( q-p, \frac{(2n-x)}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right) \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.73}$$

### 3.3.2.2.8 Convecção/Fluxo Prescrito:

Para a aplicação das condições de contorno de convecção na superfície A e de fluxo prescrito na superfície B, aplica-se os coeficientes  $k_A=1$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=Bi$ ,  $B_B=0$  e  $f_0=Bi\theta_\infty$  na Eq. (3.54), resultando em:

$$\bar{\theta} = \frac{Bi\theta_\infty\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \left( \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{(\sqrt{s}+Bi)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(\sqrt{s}-Bi)}{(\sqrt{s}+Bi)} \right)^n \left( \frac{e^{-(2n+x)\sqrt{s}}}{(\sqrt{s}+Bi)} + \frac{e^{-(2n-x)\sqrt{s}}}{(\sqrt{s}-Bi)} \right) \right) \quad (3.74)$$

Como realizado anteriormente, o termo interno do somatório é expandido em séries binomiais e, em seguida, distribuindo no somatório. Com isso obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \bar{\theta} = Bi\theta_\infty\Gamma(m+1) \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{m+1}(\sqrt{s}+Bi)} + Bi\theta_\infty\Gamma(m+1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(n+1)(-2Bi)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)} \frac{e^{-(2n+x)\sqrt{s}}}{s^{m+1}(\sqrt{s}+Bi)^{j+1}} \\ + Bi\theta_\infty\Gamma(m+1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n)(-2Bi)^q}{\Gamma(q+1)\Gamma(n-q)} \frac{e^{-(2n-x)\sqrt{s}}}{s^{m+1}(\sqrt{s}+Bi)^{q+1}} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Finalmente aplicam-se as transformadas inversas, dadas pelas Eqs. (3.55) e (3.56). Após reorganizar a expressão anterior, chega-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\theta = & \theta_{\infty} \Gamma(m+1) \left( \sum_{r=0}^{2m} \frac{(-Bi\sqrt{4\tau})^r}{(-Bi)^{(2m)}} \operatorname{erfc} \left( r+1, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right) - \frac{e^{Bix+Bi^2\tau}}{(-Bi)^{(2m)}} \operatorname{erfc} \left( 1, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right) \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^n \sum_{p=0}^j \left( \frac{\theta_{\infty} \Gamma(m+1) \Gamma(n+1) \Gamma(2m+1+p) (-1)^{2m+j} 2^{2j-p} \sqrt{\tau}^{(j-p)}}{\Gamma(j+1) \Gamma(n-j+1) \Gamma(2m+1) \Gamma(p+1) Bi^{(p+2m-j)}} \right. \\
& \quad \left. \left( \sum_{r=0}^{2m+p} \frac{\Gamma(j+1-p+r) (-2Bi\sqrt{\tau})^r}{\Gamma(j+1-p) \Gamma(r+1)} \operatorname{erfc} \left( j-p+r, \frac{(2n+x)}{\sqrt{4\tau}} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. - e^{Bix+Bi^2\tau} \operatorname{erfc} \left( j-p, \frac{(2n+x)}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right) \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{p=0}^q \left( \frac{\theta_{\infty} \Gamma(m+1) \Gamma(n) \Gamma(2m+1+p) (-1)^{2m+q} 2^{2q-p} (\sqrt{\tau})^{(q-p)}}{\Gamma(q+1) \Gamma(n-q) \Gamma(2m+1) \Gamma(p+1) Bi^{(p+2m-q)}} \right. \\
& \quad \left. \left( \sum_{r=0}^{2m+p} \frac{\Gamma(q+1-p+r) (-Bi\sqrt{4\tau})^r}{\Gamma(q+1-p) \Gamma(r+1)} \operatorname{erfc} \left( q-p+r, \frac{(2n-x)}{\sqrt{4\tau}} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. - e^{Bix+Bi^2\tau} \operatorname{erfc} \left( q-p, \frac{(2n-x)}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.76}$$

### 3.3.2.2.9 Convecção/Convecção:

Para obter a distribuição de temperaturas para o último caso, convecção em ambas as superfícies, os seguintes valores são substituídos na Eq. 3.54:  $k_A=1$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=Bi$ ,  $B_B=Bi$  e  $f_0=Bi\theta_\infty$ , levando à seguinte expressão:

$$\bar{\theta} = \frac{Bi\theta_\infty\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \left( \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{(\sqrt{s}+Bi)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(\sqrt{s}-Bi)}{(\sqrt{s}+Bi)} \right)^{2n} \left( \frac{e^{-(2n+x)\sqrt{s}}}{(\sqrt{s}+Bi)} + \frac{e^{-(2n-x)\sqrt{s}}}{(\sqrt{s}-Bi)} \right) \right) \quad (3.77)$$

Novamente expande-se o termo interno do somatório em séries binomiais e distribui-se o resultado no somatório obtendo-se:

$$\bar{\theta} = Bi\theta_\infty\Gamma(m+1) \left( \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{m+1}(\sqrt{s}+Bi)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sum_{j=0}^{2n} \frac{\Gamma(2n+1)(-2Bi)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma(2n-j+1)} \frac{e^{-(2n+x)\sqrt{s}}}{s^{m+1}(\sqrt{s}+Bi)^{j+1}} + \sum_{q=0}^{2n-1} \frac{\Gamma(2n)(-2Bi)^q}{\Gamma(q+1)\Gamma(2n-q)} \frac{e^{-(2n-x)\sqrt{s}}}{s^{m+1}(\sqrt{s}+Bi)^{q+1}} \right) \right) \quad (3.78)$$

A transformada inversa é obtida aplicando-se as expressões dadas pela Eqs. (3.55) e (3.56), para obter, após manipulação, a expressão:

$$\begin{aligned}
& \theta = \theta_{\infty} \Gamma(m+1) \left( \sum_{r=0}^{2m} \frac{(-Bi\sqrt{4\tau})^r}{(-Bi)^{(2m)}} \operatorname{erfc} \left( r, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right) - \frac{e^{Bix+Bi^2\tau}}{(-Bi)^{(2m)}} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right) \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2n} \sum_{p=0}^{j-1} \left( \frac{\theta_{\infty} \Gamma(m+1) \Gamma(2n+1) \Gamma(2m+1+p) (-1)^{2m+j} 2^{2j-p-1} \sqrt{\tau}^{(j-p-1)}}{\Gamma(j+1) \Gamma(2n-j+1) \Gamma(2m+1) \Gamma(p+1) Bi^{(p+2m-j)}} \right. \\
& \quad \left. \left( \sum_{r=0}^{2m+p} \frac{\Gamma(j-p+r)}{\Gamma(j-p) \Gamma(r+1)} (-Bi\sqrt{4\tau})^r \operatorname{erfc} \left( j-p+r-1, \frac{(2n+x)}{\sqrt{4\tau}} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. - e^{Bix+Bi^2\tau} \operatorname{erfc} \left( j-p-1, \frac{(2n+x)}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right) \right) \quad (3.79) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{2n-1} \sum_{p=0}^{q-1} \left( \frac{\theta_{\infty} \Gamma(m+1) \Gamma(2n) \Gamma(2m+1+p) (-1)^{2m+q} 2^{2q-p-1} \sqrt{\tau}^{(q-p-1)}}{\Gamma(q+1) \Gamma(2n-q) \Gamma(2m+1) \Gamma(p+1) Bi^{(p+2m-q)}} \right. \\
& \quad \left( \sum_{r=0}^{2m+p} \frac{\Gamma(q-p+r)}{\Gamma(q-p) \Gamma(r+1)} (-Bi\sqrt{4\tau})^r \operatorname{erfc} \left( q-p+r-1, \frac{(2n-x)}{\sqrt{4\tau}} \right) \right) \\
& \quad \left. - e^{Bix+Bi^2\tau} \operatorname{erfc} \left( q-p-1, \frac{(2n-x)}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right) \right)
\end{aligned}$$



### 3.4 SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Nesta secção são apresentadas as soluções matemáticas para o problema proposto no início do capítulo usando a técnica de separação de variáveis. Será apresentado inicialmente o desenvolvimento de forma unificada para o conjunto de condições de contorno no caso do domínio de sólido finito. Em seguida será feita uma breve análise sobre o caso do domínio de sólido semi-infinito.

#### 3.4.1 Sólido Finito

Novamente parte-se da equação de condução de calor unidimensional em sua forma adimensional, Eq. (3.2), e as condições de contorno, Eqs. (3.5), e inicial na forma geral e adimensional

$$\theta = 0 \quad \text{em } \tau = 0 \quad (3.80)$$

Conforme descrito no capítulo 2, conforme a metodologia de separação de variáveis, arbitra-se que a solução  $\theta$  possa ser escrita como uma soma de duas funções:  $\theta_{tr}$  e  $\theta_{rp}$ . A função  $\theta_{rp}$  é a solução do problema em regime permanente e  $\theta_{tr}$  é a solução transiente do problema. Fazendo a substituição  $\theta = \theta_{tr} + \theta_{rp}$  na equação e nas condições de contorno o problema pode ser dividido em dois: um para regime permanente e outro para transiente.

##### 3.4.1.1 Regime Permanente

A formulação do problema em regime permanente consiste da equação diferencial sujeitas às condições de contorno e inicial, respectivamente:

$$\frac{\partial \theta_{rp}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{rp}}{\partial x^2} \quad (3.81.a)$$

$$-k_A \frac{\partial \theta_{rp}}{\partial x} + B_A \theta_{rp} = f_A \quad \text{em } x = 0 \quad (3.81.b)$$

$$k_B \frac{\partial \theta_{rp}}{\partial x} + B_B \theta_{rp} = 0 \quad \text{em } x = 1 \quad (3.81.c)$$

$$\theta_{rp} = 0 \quad \text{em } \tau = 0 \quad (3.81.d)$$

Leva-se em conta a variável temporal, pois na situação de fluxo prescrito nas duas fronteiras, não há uma solução de regime permanente. Existe, neste caso, uma solução estável transiente, em que todos os pontos do domínio de solução (em  $x$ ) variam uniformemente com o passar do tempo, de forma que os gradientes de temperatura internos sejam mantidos constantes. Assim, de forma a apresentar uma análise única para todos os casos, escreve-se  $\theta_{rp}$  como sendo a soma de duas funções:  $\theta_{p\tau}$  e  $\theta_{px}$ ; essas soluções são dependentes apenas das variáveis temporal e espacial, respectivamente. Substituindo essa relação na Eq. (3.81.a) tem-se

$$\frac{\partial \theta_{p\tau}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{px}}{\partial x^2} \quad (3.82)$$

Arbitrando-se uma constante de conexão,  $\lambda_p$ , pode-se separar essa equação em duas:

$$\frac{\partial \theta_{p\tau}}{\partial \tau} = \lambda_p \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \theta_{px}}{\partial x^2} = \lambda_p \quad (3.83)$$

Essas equações têm como solução

$$\theta_{px} = \lambda_p \frac{(1-x)^2}{2} + C_{1p}(1-x) + C_{2p} \quad \text{e} \quad \theta_{p\tau} = \lambda_p \tau + C_{3p} \quad (3.84)$$

onde  $C_{1p}$ ,  $C_{2p}$  e  $C_{3p}$  são as constantes da solução e a solução de  $\theta_{px}$  é escrita em  $(1-x)$  por simplicidade devido a condição homogênea existente em  $x=1$ . Somando as duas soluções e rearranjando os coeficientes a expressão para  $\theta_{rp}$  pode ser escrita na forma

$$\theta_{rp} = \lambda_p \left( \frac{(1-x)^2}{2} + \tau \right) + C_{1p}(1-x) + C_{2p} \quad (3.85)$$

e a derivada espacial

$$\frac{\partial \theta_{rp}}{\partial x} = -\lambda_p (1-x) - C_{1p} \quad (3.86)$$

Substituindo essas expressões nas condições de contorno têm-se, após alguma manipulação algébrica,

$$\lambda_p \left( k_A + \frac{B_A}{2} + B_A \tau \right) + C_{1p} (k_A + B_A) + C_{2p} B_A = f_A \quad (3.87.a)$$

$$\lambda_p B_B \tau - C_{1p} k_B + C_{2p} B_B = 0 \quad (3.87.b)$$

Para todas as combinações de condições de contorno, com exceção da solução de fluxo prescrito nas duas superfícies, existe uma solução de regime permanente que não depende do tempo, por isso considera-se  $\lambda_p = 0$  e as condições tornam-se:

$$C_{1p} (k_A + B_A) + C_{2p} B_A = f_A \quad (3.88.a)$$

$$C_{1p} k_B = C_{2p} B_B \quad (3.88.b)$$

Solucionando-se o sistema (3.88) de acordo com as condições de contorno, ou seja, substituindo valores adequados para os parâmetros  $k_A$ ,  $k_B$ ,  $B_A$ ,  $B_B$  e  $f_A$  obtêm-se as soluções em regime permanente.

Se for tentado resolver o sistema (3.81) para o caso representado pela condição de fluxo prescrito em ambas as superfícies do sólido, ( $k_A = 1$ ,  $k_B = 1$ ,  $B_A = 0$ ,  $B_B = 0$ ) obter-se-á uma indeterminação. Assim, nessa situação, define-se  $C_{2p} = 0$  pela condição inicial (3.81.d) e calcula-se  $C_{1p}$  e  $\lambda_p$  com as condições de contorno. Desta forma as Eqs. (3.88.a) e (3.88.b) fornecem os parâmetros  $\lambda_p = Q_A$  e  $C_{1p} = 0$  respectivamente. A solução de regime permanente se apresenta na forma:

$$\theta_{rp} = Q_A \left( \frac{(1-x)^2}{2} + \tau \right) \quad (3.89)$$

A Tabela 3.1 apresenta os parâmetros, as constantes e as expressões para as distribuições de temperatura em regime permanente para todos os casos analisados neste trabalho.

### 3.4.1.2 Regime Transiente

Para o regime transiente a equação diferencial e as condições de contorno são respectivamente:

$$\frac{\partial \theta_{tr}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{tr}}{\partial x^2} \quad (3.90.a)$$

$$-k_A \frac{\partial \theta_{tr}}{\partial x} + B_A \theta_{tr} = 0 \quad \text{em } x=0 \quad (3.90.b)$$

$$k_B \frac{\partial \theta_{tr}}{\partial x} + B_B \theta_{tr} = 0 \quad \text{em } x=1 \quad (3.90.c)$$

e como a condição inicial original é  $\theta=0$  e  $\theta=\theta_r+\theta_{rp}$  logo, a condição inicial para o regime transiente é dada pela solução de regime permanente, Eq. (3.85), avaliada em  $\tau=0$  com sinal invertido, ou seja:

$$\theta_{tr} = - \left( \lambda_p \frac{(1-x)^2}{2} + C_{1p}(1-x) + C_{2p} \right) \text{ em } \tau=0 \quad (3.91)$$

Tabela 3-1 – Relação das condições de contorno e solução em regime permanente

$x = 0$	$x = 1$	$k_A$	$B_A$	$f_A$	$k_B$	$B_B$	$C_{1p}$	$C_{2p}$	$\lambda_p$	Solução
T	T	0	1	$\theta_A$	0	1	$\theta_A$	0	0	$\theta_{rp} = \theta_A(1-x)$
T	F	0	1	$\theta_A$	1	0	0	$\theta_A$	0	$\theta_{rp} = \theta_A$
T	C	0	1	$\theta_A$	1	$Bi$	$C_{2p} Bi$	$\frac{\theta_A}{Bi+1}$	0	$\theta_{rp} = \frac{\theta_A}{Bi+1}(Bi(1-x)+1)$
F	T	1	0	$Q_A$	0	1	$Q_A$	0	0	$\theta_{rp} = Q_A(1-x)$
F	F	1	0	$Q_A$	1	0	0	0	$Q_A$	$\theta_{rp} = Q_A \left( \frac{(1-x)^2}{2} + \tau \right)$
F	C	1	0	$Q_A$	1	$Bi$	$C_{2p} Bi$	$\frac{Q_A}{Bi}$	0	$\theta_{rp} = \frac{Q_A}{Bi}(Bi(1-x)+1)$
C	T	1	$Bi$	$Bi \theta_\infty$	0	1	$\frac{Bi \theta_\infty}{(1+Bi)}$	0	0	$\theta_{rp} = \frac{Bi \theta_\infty}{(1+Bi)}(1-x)$
C	F	1	$Bi$	$Bi \theta_\infty$	1	0	0	$\theta_\infty$	0	$\theta_{rp} = \theta_\infty$
C	C	1	$Bi$	$Bi \theta_\infty$	1	$Bi$	$C_{2p} Bi$	$\frac{\theta_\infty}{2+Bi}$	0	$\theta_{rp} = \frac{\theta_\infty}{2+Bi}(Bi(1-x)+1)$

T – Temperatura Prescrita; F – Fluxo Prescrito; C- Convecção

Note-se ainda que a condição de contorno em  $x=0$  não considera a função  $f_A$ , já considerada na solução em regime permanente.

Para a solução do problema transiente, seguindo a metodologia apresentada no capítulo 2, escreve-se a solução desejada como um produto de duas soluções (Kreyszig, 1999): uma dependente somente da posição,  $\theta_{tx}$ , e a outra,  $\theta_{t\tau}$ , somente da variável temporal, ou seja:

$$\theta_{tr} = \theta_{tx} \theta_{t\tau} \quad (3.92)$$

Substituindo-a na equação (3.90.a) obtêm-se, após simples manipulação algébrica,

$$\frac{1}{\theta_{t\tau}} \frac{\partial \theta_{t\tau}}{\partial \tau} = \frac{1}{\theta_{tx}} \frac{\partial^2 \theta_{tx}}{\partial x^2} \quad (3.93)$$

Arbitrando-se uma constante de conexão,  $-\lambda_t^2$ , pode-se separar essa equação em duas:

$$\frac{1}{\theta_{t\tau}} \frac{\partial \theta_{t\tau}}{\partial \tau} = -\lambda_t^2 \quad (3.94.a)$$

$$\frac{1}{\theta_{tx}} \frac{\partial^2 \theta_{tx}}{\partial x^2} = -\lambda_t^2 \quad (3.94.b)$$

Essas equações têm como solução

$$\theta_{t\tau} = C_{1t} \exp(-\lambda_t^2 \tau) \quad (3.95.a)$$

$$\theta_{tx} = C_{2t} \sin(\lambda_t(1-x)) + C_{3t} \cos(\lambda_t(1-x)) \quad (3.95.b)$$

onde  $C_{1t}$ ,  $C_{2t}$  e  $C_{3t}$  são os coeficientes da solução. Juntando as duas soluções e rearranjando os coeficientes a expressão para  $\theta_{tr}$  pode ser escrita na forma

$$\theta_{tr} = (C_{1t} \sin(\lambda_t(1-x)) + C_{2t} \cos(\lambda_t(1-x))) \exp(-\lambda_t^2 \tau). \quad (3.96)$$

e a derivada espacial

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial x} = -\lambda_t (C_{1t} \cos(\lambda_t(1-x)) - C_{2t} \sin(\lambda_t(1-x))) \exp(-\lambda_t^2 \tau) \quad (3.97)$$

Substituindo as expressões (3.96) e (3.97) nas condições de contorno (3.90.b) e (3.90.c) têm-se, após alguma manipulação algébrica:

$$C_{1t} (k_A \lambda_t \cos(\lambda_t) + B_A \sin(\lambda_t)) = C_{2t} (k_A \lambda_t \sin(\lambda_t) - B_A \cos(\lambda_t)) \quad (3.98.a)$$

$$k_B \lambda_t C_{1t} = B_B C_{2t} \quad (3.98.b)$$

Unindo-se as duas expressões obtém-se:

$$B_B (k_A \lambda_t \cos(\lambda_t) + B_A \sin(\lambda_t)) = k_B \lambda_t (k_A \lambda_t \sin(\lambda_t) - B_A \cos(\lambda_t)) \quad (3.99)$$

com a qual, após alguma manipulação, obtêm-se:

$$(B_B k_A + B_A k_B) \lambda_t \cos(\lambda_t) = (k_B k_A \lambda_t^2 - B_B B_A) \sin(\lambda_t) \quad (3.100)$$

que é a equação transcendental de onde podem ser obtidos os autovalores da solução,  $\lambda_m$ . Reescreve-se a solução na forma

$$\theta_w = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1m} \sin(\lambda_m(1-x)) + C_{2m} \cos(\lambda_m(1-x))) \exp(-\lambda_m^2 \tau) \quad (3.101)$$

Dos dois coeficientes restantes, um é obtido pela expressão (3.98.b), i.e.,  $\lambda_m k_B C_{1m} = B_B C_{2m}$  e o último fazendo uso da condição inicial, apresentada abaixo, e da propriedade da ortogonalidade das funções trigonométricas (Kreyszig, 1999).

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_{1m} \sin(\lambda_m(1-x)) + C_{2m} \cos(\lambda_m(1-x))) = - \left( \frac{\lambda_p}{2} (1-x)^2 + C_{1p} (1-x) + C_{2p} \right) \quad (3.102)$$

Aqui se faz necessário a análise de duas possibilidades. Na primeira considera-se  $B_B \neq 0$ , o que ocorre nas condições de convecção e temperatura prescrita na fronteira  $x=1$ . Neste caso, multiplica-se a Eq. (3.102) por  $B_B$  e, após se inserir a Eq. (3.98.b) obtêm-se a seguinte expressão

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{1m} (B_B \sin(\lambda_m(1-x)) + \lambda_m k_B \cos(\lambda_m(1-x))) = -B_B \left( \frac{\lambda_p}{2} (1-x)^2 + C_{1p} (1-x) + C_{2p} \right) \quad (3.103)$$

Assim, multiplicando a Eq. (3.103) pela expressão  $B_B \sin(\lambda_m(1-x)) + \lambda_m k_B \cos(\lambda_m(1-x))$  e integrando ambos os lados da equação em  $x$  entre 0 e 1, têm-se

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} C_{1m} \int_0^1 (B_B \sin(\lambda_m(1-x)) + \lambda_m k_B \cos(\lambda_m(1-x))) (B_B \sin(\lambda_m(1-x)) + \lambda_m k_B \cos(\lambda_m(1-x))) dx = \\ - \int_0^1 B_B \left( \frac{\lambda_p}{2} (1-x)^2 + C_{1p} (1-x) + C_{2p} \right) (B_B \sin(\lambda_m(1-x)) + \lambda_m k_B \cos(\lambda_m(1-x))) dx \end{aligned} \quad (3.104)$$

Da propriedade da ortogonalidade, nota-se que



$$\int_0^1 \left( B_B \sin(\lambda_m (1-x)) + \lambda_m k_B \cos(\lambda_m (1-x)) \right) \left( B_B \sin(\lambda_m (1-x)) + \lambda_m k_B \cos(\lambda_m (1-x)) \right) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ N(\lambda_m, k_B, B_B), m = n \end{cases} \quad (3.105)$$

onde  $N$  é a norma ortogonal da função (Kreyszig, 1999).

Assim, consegue-se resolver a Eq. (3.104) para a constante, obtendo-se

$$C_{1m} = - \frac{\int_0^1 B_B \left( \frac{\lambda_p}{2} (1-x)^2 + C_{1p} (1-x) + C_{2p} \right) \left( B_B \sin(\lambda_m (1-x)) + \lambda_m k_B \cos(\lambda_m (1-x)) \right) dx}{\int_0^1 \left( B_B \sin(\lambda_m (1-x)) + \lambda_m k_B \cos(\lambda_m (1-x)) \right)^2 dx} \quad (3.106)$$

Logo a solução em regime transiente pode ser reescrita

$$\theta_w = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda_n^2 \tau) \left( B_B \sin(\lambda_n (1-x)) + \lambda_n k_B \cos(\lambda_n (1-x)) \right) *}{\int_0^1 \left( B_B \sin(\lambda_n (1-x)) + \lambda_n k_B \cos(\lambda_n (1-x)) \right)^2 dx} \quad (3.107)$$

$$\int_0^1 \left( \frac{\lambda_p}{2} (1-x)^2 + C_{1p} (1-x) + C_{2p} \right) \left( B_B \sin(\lambda_n (1-x)) + \lambda_n k_B \cos(\lambda_n (1-x)) \right) dx$$

com os autovalores obtidos em (3.100). E a solução final  $\theta$  é apresentada no formato

$$\theta = \left( \frac{\lambda_p}{2} (1-x)^2 + C_{1p} (1-x) + C_{2p} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda_m^2 \tau) (B_B \sin(\lambda_m (1-x)) + \lambda_m k_B \cos(\lambda_m (1-x)))}{\int_0^1 (B_B \sin(\lambda_m (1-x)) + \lambda_m k_B \cos(\lambda_m (1-x)))^2 dx} * \int_0^1 \left( \frac{\lambda_p}{2} (1-x)^2 + C_{1p} (1-x) + C_{2p} \right) (B_B \sin(\lambda_m (1-x)) + \lambda_m k_B \cos(\lambda_m (1-x))) dx \quad (3.108)$$

No segundo caso, considera-se  $B_B = 0$ , implicando em  $C_{1m} = 0$ . A Eq.(3.102) torna-se então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{2m} \cos(\lambda_m (1-x)) = - \left( \frac{\lambda_p}{2} (1-x)^2 + C_{1p} (1-x) + C_{2p} \right) \quad (3.109)$$

Por sua vez, multiplicando a expressão (3.109) por  $\cos(\lambda_m (1-x))$  e integrando ambos os lados da equação em  $x$  entre 0 e 1 obtêm-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{2m} \int_0^1 \cos(\lambda_m (1-x)) \cos(\lambda_m (1-x)) dx = - \int_0^1 \left( \frac{\lambda_p}{2} (1-x)^2 + C_{1p} (1-x) + C_{2p} \right) \cos(\lambda_m (1-x)) dx \quad (3.110)$$

Da propriedade da ortogonalidade (Kreyszig, 1999), nota-se que

$$\int_0^1 \cos(\lambda_m(1-x))\cos(\lambda_n(1-x))dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ N(\lambda_m), m=n \end{cases} \quad (3.111)$$

Assim,

$$C_{2m} = - \frac{\int_0^1 \left( \frac{\lambda_p}{2}(1-x)^2 + C_{1p}(1-x) + C_{2p} \right) \cos(\lambda_m(1-x)) dx}{\int_0^1 \cos^2(\lambda_m(1-x)) dx} \quad (3.112)$$

Considerando-se a restrição de  $B_B=0$ , tem-se:  $B_A \cos(\lambda_m) = k_A \lambda_m \sin(\lambda_m)$  e  $\lambda_p=0$  e a solução de regime permanente pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\theta_r = - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \exp(-\lambda_n^2 \tau) \cos(\lambda_n(1-x)) \frac{\int_0^1 (C_{1p}(1-x) + C_{2p}) \cos(\lambda_n(1-x)) dx}{\int_0^1 \cos^2(\lambda_n(1-x)) dx} \right) \quad (3.113)$$

os autovalores são obtidos da equação transcendental:

$$B_A \cos(\lambda_m) = k_A \lambda_m \sin(\lambda_m) \quad (3.114)$$

E a solução original é dada por

$$\theta = (C_{1p}(1-x) + C_{2p}) - \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{(-\lambda_n^2 \tau)} \cos(\lambda_n(1-x)) \frac{\int_0^1 (C_{1p}(1-x) + C_{2p}) \cos(\lambda_n(1-x)) dx}{\int_0^1 \cos^2(\lambda_n(1-x)) dx} \right) \quad (3.115)$$

### 3.4.1.3 Solução completa

A solução completa é obtida reunindo os modelos matemáticos para regime permanente com os de regime transiente, adotando-se os valores corretos para os parâmetros, de acordo com as condições de contorno consideradas.

#### 3.4.1.3.1 Temperatura Prescrita/Temperatura Prescrita:

Para a condição de temperatura prescrita em ambas as superfícies do sólido, deve-se adotar os seguintes parâmetros:  $k_A=0$ ,  $k_B=0$ ,  $B_A=1$ ,  $B_B=1$  e  $f_0=\theta_A$  para as condições de contorno. Utiliza-se a Eq. 3.100 para o cálculo dos autovalores, que, depois de substituídos os parâmetros, resultam na expressão  $\sin(\lambda_m)=0$ , de onde se obtêm que  $\lambda_m=n\pi$ . Assim, aplicando-se os valores obtidos na Tab. 3-1 na Eq. 3.109, esta torna-se:

$$\theta=\theta_A(1-x)-\theta_A \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \tau} \sin(n\pi(1-x)) \frac{\int_0^1 (1-x)\sin(n\pi(1-x))dx}{\int_0^1 \sin^2(n\pi(1-x))dx} \quad (3.116)$$

Calculando as integrais:

$$\int_0^1 (1-x)\sin(n\pi(1-x))dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad (3.117)$$

e

$$\int_0^1 \sin^2(n\pi(1-x))dx = \frac{1}{2} \quad (3.118)$$

Pode-se reescrever a Eq. 3.116 na forma:

$$\theta = \theta_A \left\{ (1-x) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \sin(n\pi(1-x)) \right\} \quad (3.119)$$

#### 3.4.1.3.2 Temperatura Prescrita/Fluxo Prescrito:

Para o caso temperatura prescrita na superfície A e fluxo prescrito na superfície B, utilizam-se os valores para os parâmetros  $k_A=0$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=1$ ,  $B_B=0$  e  $f_0=\theta_A$ , na Eq. 3.115 para determinar a distribuição de temperatura, cujos autovalores são obtidos a partir da solução da expressão  $\cos(\lambda_m)=0$  (Eq. 3.100), que resulta em  $\lambda_m=(2n-1)\pi/2$ . Aplicando-se ainda os valores das constantes de acordo como a Tab. 3-1 (relativas ao regime permanente), a Eq. 3.115 torna-se:

$$\theta = \theta_A \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2}{4} \pi^2 \tau\right) \cos\left(\frac{(2n-1)}{2} \pi(1-x)\right) \frac{\int_0^1 \cos\left(\frac{(2n-1)}{2} \pi(1-x)\right) dx}{\int_0^1 \cos^2\left(\frac{(2n-1)}{2} \pi(1-x)\right) dx} \right\} \quad (3.120)$$

De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, calculando-se as integrais:

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{(2n-1)}{2} \pi(1-x)\right) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} \quad (3.121)$$

e

$$\int_0^1 \cos^2 \left( \frac{(2n-1)}{2} \pi (1-x) \right) dx = \frac{1}{2} \quad (3.122)$$

Pode-se reescrever a Eq. 3.120 na forma:

$$\theta = \theta_A \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \exp \left( -\frac{(2n-1)^2}{4} \pi^2 \tau \right) \cos \left( \frac{(2n-1)}{2} \pi (1-x) \right) \right\} \quad (3.123)$$

#### 3.4.1.3.3 Temperatura Prescrita/Convecção:

Aplicam-se os valores aos parâmetros:  $k_A=0$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=1$ ,  $B_B=Bi$  e  $f_0=\theta_A$  na Eq. 3.109 para obter-se a distribuição de temperaturas para um sólido sujeito a temperatura prescrita na superfície A e convecção na superfície B. Os autovalores são obtidos da expressão  $\lambda_m \cos(\lambda_m) = -Bi \sin(\lambda_m)$ , que após manipulação, resulta na equação transcendental:  $-\lambda_m / Bi = \tan(\lambda_m)$ . Os autovalores são determinados numericamente. A distribuição de temperatura, após a substituição de valores das constantes convenientes dadas na Tab. 3-1, é então dada pela expressão:

$$\theta = \frac{\theta_A}{Bi + 1} (Bi(1-x) + 1)$$

$$- \frac{\theta_A}{Bi + 1} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_m^2 \tau) (Bi \sin(\lambda_m(1-x)) + \lambda_m \cos(\lambda_m(1-x))) \frac{\int_0^1 (Bi(1-x) + 1) (Bi \sin(\lambda_m(1-x)) + \lambda_m \cos(\lambda_m(1-x))) dx}{\int_0^1 (Bi \sin(\lambda_m(1-x)) + \lambda_m \cos(\lambda_m(1-x)))^2 dx} \quad (3.124)$$

Calculando-se separadamente as integrais:

$$\int_0^1 (Bi(1-x) + 1) (Bi \sin(\lambda_m(1-x)) + \lambda_m \cos(\lambda_m(1-x))) dx = -(1 + Bi) \cos(\lambda_m) \left( \frac{Bi}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{Bi} \right) \quad (3.125)$$

e

$$\int_0^1 (Bi \sin(\lambda_m(1-x)) + \lambda_m \cos(\lambda_m(1-x)))^2 dx = \frac{\lambda_m}{2} (\cos^2(\lambda_m) + Bi) \left( \frac{Bi}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{Bi} \right) \quad (3.126)$$

a Eq. 3.124 assume a forma:

$$\theta = \theta_A \left\{ 1 - \frac{Bi x}{Bi + 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_m} \exp(-\lambda_m^2 \tau) \left( Bi \sin(\lambda_m (1-x)) + \lambda_m \cos(\lambda_m (1-x)) \right) \frac{\cos(\lambda_m)}{\cos^2(\lambda_m) + Bi} \right\} \quad (3.127)$$

#### 3.4.1.3.4 Fluxo Prescrito/Temperatura Prescrita:

A distribuição de temperatura para as condições de contorno no sólido: fluxo prescrito na Superfície A e temperatura prescrita na superfície B é obtida com o emprego dos valores  $k_A=1$ ,  $k_B=0$ ,  $B_A=0$ ,  $B_B=1$  e  $f_0=Q_A$ . Emprega-se também as constantes adequadas obtidas da Tab. 3-1, juntamente com os autovalores obtidos da Eq. 3.100, a partir da expressão  $\cos(\lambda_m)=0$ , de onde se obtêm que  $\lambda_m=(2n-1)\pi/2$ . Assim, a Eq. 3.109 se torna em:

$$\theta = Q_A \left\{ (1-x) - \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2}{4} \pi^2 \tau\right) \sin\left(\frac{(2n-1)}{2} \pi(1-x)\right) \frac{\int_0^1 (1-x) \sin\left(\frac{(2n-1)}{2} \pi(1-x)\right) dx}{\int_0^1 \sin^2\left(\frac{(2n-1)}{2} \pi(1-x)\right) dx} \right\} \quad (3.128)$$

Conhecendo-se as soluções das integrais:

$$\int_0^1 (1-x) \sin\left(\frac{(2n-1)}{2} \pi(1-x)\right) dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2 (2n-1)^2} \quad (3.129)$$



e

$$\int_0^1 \sin^2 \left( \frac{(2n-1)}{2} \pi (1-x) \right) dx = \frac{1}{2}, \quad (3.130)$$

a Eq. 3.128 pode ser reescrita na forma:

$$\theta = Q_A \left\{ (1-x) - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \exp \left( -\frac{(2n-1)^2}{4} \pi^2 \tau \right) \sin \left( \frac{(2n-1)}{2} \pi (1-x) \right) \right\} \quad (3.131)$$

#### 3.4.1.3.5 Fluxo Prescrito/Fluxo Prescrito:

Para o caso das condições de contorno fluxo prescrito em ambas as superfícies, aplicam-se os seguintes valores aos parâmetros  $k_A=1$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=0$ ,  $B_B=0$  e  $f_0=Q_A$ , os quais levam a equação de autovalores (Eq. 3.100) para a forma  $\sin(\lambda_n)=0$  da qual obtêm-se  $\lambda_n=n\pi$ . Com isso, a Eq. 3.115 torna-se

$$\theta = Q_A \left\{ \left( \frac{(1-x)^2}{2} + \tau \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \cos(n\pi(1-x)) \frac{\int_0^1 \left( \frac{(1-x)^2}{2} + \tau \right) \cos(n\pi(1-x)) dx}{\int_0^1 \cos^2(n\pi(1-x)) dx} \right\} \quad (3.132)$$

De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, fazendo-se as integrações:

$$\int_0^1 \left( \frac{(1-x)^2}{2} + \tau \right) \cos(n\pi(1-x)) dx = \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} \quad (3.133)$$

e

$$\int_0^1 \cos^2(n\pi(1-x)) dx = \frac{1}{2}, \quad (3.134)$$

pode-se reescrever a Eq. 3.132 na forma:

$$\theta = Q_A \left\{ \left( \frac{(1-x)^2}{2} + \tau \right) - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \cos(n\pi(1-x)) \right\} \quad (3.135)$$

### 3.4.1.3.6 Fluxo Prescrito/Convecção:

A condição de fluxo prescrito na superfície A e convecção na superfície B é reproduzida considerando-se os valores  $k_A=1$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=0$ ,  $B_B=Bi$  e  $f_0=Q_A$ . O autovalor é calculado pela expressão  $Bi \cos(\lambda_m) = \lambda_m \sin(\lambda_m)$  (ver Eq. 3.100) e precisa ser obtido numericamente. Desta forma, a solução dada pela Eq. 3.109, após a aplicação de parâmetros adequados, pode ser escrita na forma:

$$\theta = \frac{Q_A}{Bi} (Bi(1-x)+1) - \frac{Q_A}{Bi} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n^2 \tau) \frac{\int_0^1 (Bi(1-x)+1) (Bi \sin(\lambda_n(1-x)) + \lambda_n \cos(\lambda_n(1-x))) dx}{\int_0^1 (Bi \sin(\lambda_n(1-x)) + \lambda_n \cos(\lambda_n(1-x)))^2 dx} \quad (3.136)$$

Calculando-se separadamente as integrais:

$$\int_0^1 (Bi(1-x)+1) (Bi \sin(\lambda_m(1-x)) + \lambda_m \cos(\lambda_m(1-x))) dx = -(1+Bi) \cos(\lambda_m) \left( \frac{Bi}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{Bi} \right) \quad (3.137)$$

e

$$\int_0^1 \left( Bi \sin(\lambda_m (1-x)) + \lambda_m \cos(\lambda_m (1-x)) \right)^2 dx = \frac{\lambda_m}{2} \left( \cos^2(\lambda_m) + Bi \right) \left( \frac{Bi}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{Bi} \right) \quad (3.138)$$

A Eq. 3.136 assume a forma:

$$\theta = \frac{Q_A}{Bi} (Bi(1-x) + 1) + \frac{Q_A}{Bi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_m} \exp(-\lambda_m^2 \tau) (Bi \sin(\lambda_m (1-x)) + \lambda_m \cos(\lambda_m (1-x))) \frac{(1+Bi) \cos(\lambda_m)}{\cos^2(\lambda_m) + Bi} \quad (3.139)$$

#### 3.4.1.3.7 Convecção/Temperatura Prescrita:

A combinação de condições de contorno: convecção para a superfície A e temperatura prescrita para a superfície B, apresenta o conjunto de parâmetros:  $k_A=1$ ,  $k_B=0$ ,  $B_A=Bi$ ,  $B_B=1$  e  $f_0=Bi\theta_\infty$ , de forma que a Eq. 3.109, aplicando-se os autovalores dados pela expressão transcendental  $\lambda_m \cos(\lambda_m) = -Bi \sin(\lambda_m)$  (ver Eq. 3.100), se apresenta como:

$$\theta = \frac{Bi \theta_\infty}{(1+Bi)} \left\{ (1-x) - \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_m^2 \tau) \sin(\lambda_m (1-x)) \frac{\int_0^1 (1-x) \sin(\lambda_m (1-x)) dx}{\int_0^1 \sin^2(\lambda_m (1-x)) dx} \right\} \quad (3.140)$$

Obtendo-se as expressões para as integrais:

$$\int_0^1 (1-x) \sin(\lambda_m (1-x)) dx = \frac{1+Bi}{\lambda_m^2} \sin(\lambda_m) \quad (3.141)$$

e

$$\int_0^1 \sin^2(\lambda_m (1-x)) dx = \frac{1}{2\lambda_m^2} (\lambda_m^2 + Bi \sin^2(\lambda_m)) \quad (3.142)$$

a distribuição de temperaturas dada pela Eq. 3.140 pode ser expressa no formato:

$$\theta = \frac{Bi \theta_\infty}{(1+Bi)} \left\{ (1-x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_m^2 \tau) \sin(\lambda_m (1-x)) \frac{(1+Bi) \sin(\lambda_m)}{(\lambda_m^2 + Bi \sin^2(\lambda_m))} \right\} \quad (3.143)$$

#### 3.4.1.3.8 Convecção/Fluxo Prescrito:

Para a combinação de condições de contorno: convecção na superfície A e fluxo prescrito na superfície B deve-se empregar os valores  $k_A=1$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=Bi$ ,  $B_B=0$  e  $f_0=Bi\theta_\infty$ . Os autovalores são obtidos

numericamente a partir da expressão  $Bi \cos(\lambda_m) = \lambda_m \sin(\lambda_m)$ , resultante da Eq. 3.100, de forma que, uma vez adotados os valores convenientes para as constantes da Eq. 3.114 (ver Tab. 3-1) esta pode ser expressa na forma:

$$\theta = \theta_\infty \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_m^2 \tau) \cos(\lambda_m (1-x)) \frac{\int_0^1 \cos(\lambda_m (1-x)) dx}{\int_0^1 \cos^2(\lambda_m (1-x)) dx} \right\} \quad (3.144)$$

Determinando-se e substituindo as integrais:

$$\int_0^1 \cos(\lambda_m (1-x)) dx = \frac{\sin(\lambda_m)}{\lambda_m} \quad (3.145)$$

e

$$\int_0^1 \cos^2(\lambda_m (1-x)) dx = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Bi} \sin^2(\lambda_m) \right) \quad (3.146)$$

a Eq. 3.144 apresenta o formato:

$$\theta = \theta_{\infty} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 Bi}{\lambda_m} \exp(-\lambda_m^2 \tau) \cos(\lambda_m (1-x)) \frac{\sin(\lambda_m)}{(Bi + \sin^2(\lambda_m))} \right\} \quad (3.147)$$

### 3.4.1.3.9 Convecção/Convecção:

Finalmente, para determinar a distribuição de temperaturas para um sólido sujeito a convecção em ambas as faces, deve-se adotar os seguintes valores para os parâmetros:  $k_A=1$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=Bi$ ,  $B_B=Bi$  e  $f_0=Bi\theta_{\infty}$ . Os autovalores, determinados a partir da substituição destes parâmetros a Eq. 3.100 é obtido a partir da solução numérica da equação transcendental:  $2Bi\lambda_m \cos(\lambda_m) = (\lambda_m^2 - Bi^2) \sin(\lambda_m)$ . A solução é então:

$$\theta = \frac{\theta_{\infty}}{2 + Bi} (Bi(1-x) + 1) - \frac{\theta_{\infty}}{2 + Bi} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_m^2 \tau) \frac{\int_0^1 (Bi(1-x) + 1) (Bi \sin(\lambda_m (1-x)) + \lambda_m \cos(\lambda_m (1-x))) dx}{\int_0^1 (Bi \sin(\lambda_m (1-x)) + \lambda_m \cos(\lambda_m (1-x)))^2 dx} \quad (3.148)$$

As integrais podem ser avaliadas como segue:

$$\int_0^1 (Bi(1-x)+1)(Bi \sin(\lambda_m(1-x))+\lambda_m \cos(\lambda_m(1-x))) dx = -(1+Bi) \cos(\lambda_m) \left( \frac{Bi}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{Bi} \right) \quad (3.149)$$

e

$$\int_0^1 (Bi \sin(\lambda_m(1-x))+\lambda_m \cos(\lambda_m(1-x)))^2 dx = \frac{\lambda_m}{2} (\cos^2(\lambda_m) + Bi) \left( \frac{Bi}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{Bi} \right) \quad (3.150)$$

Desta forma, a Eq. 3.148 assume o formato:

$$\theta = \frac{\theta_\infty}{2+Bi} \left\{ (Bi(1-x)+1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n} \exp(-\lambda_n^2 \tau) (Bi \sin(\lambda_n(1-x))+\lambda_n \cos(\lambda_n(1-x))) \frac{(1+Bi) \cos(\lambda_n)}{(\cos^2(\lambda_n) + Bi)} \right\} \quad (3.151)$$

#### 3.4.1.4 Solução com condição de contorno transiente

Todas as soluções desenvolvidas utilizando-se o método de separação de variáveis podem ser estendidas para situações em que as condições de aquecimento sejam dependentes do tempo utilizando-se o teorema de Duhamel (Meyers, 1998). Para aplicação do teorema a solução desenvolvida para a condição constante unitária, obtida na seção 3.4.1.3, é derivada em relação a  $\tau$ . No caso das soluções desenvolvidas pode-se observar que apenas o expoente da função exponencial apresenta dependência com a  $\tau$ . Realiza-se a seguinte substituição,  $\tau = u - \tau$  onde  $u$  é uma variável



de apoio. A derivada é, então, multiplicada pela função da condição de contorno temporal com  $u$  substituindo  $\tau$ . A expressão obtida é integrada na variável muda,  $u$ , entre zero e a variável temporal original,  $\tau$ . Realizando todas essas

operações a partir da Eq. (3.108) e substituindo  $\lambda_p = 0$ ,  $C_{1p} = \frac{B_B}{(B_B (k_A + B_A) + k_B B_A)}$

$C_{2p} = \frac{k_B}{(B_B (k_A + B_A) + k_B B_A)}$ , devido a solução do sistema dado em Eq. 3.89. têm-se a expressão

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(B_B \sin(\lambda_{tn}(1-x)) + \lambda_{tn} k_B \cos(\lambda_{tn}(1-x)))}{(B_B (k_A + B_A) + k_B B_A)} \left( e^{-\lambda_{tn}^2 \tau} \int_0^{\tau} f_A(u) \lambda_{tn}^2 e^{\lambda_{tn}^2 u} du \right) * \frac{\int_0^1 (B_B (1-x) + k_B) (B_B \sin(\lambda_{tn}(1-x)) + \lambda_{tn} k_B \cos(\lambda_{tn}(1-x))) dx}{\int_0^1 (B_B \sin(\lambda_{tn}(1-x)) + \lambda_{tn} k_B \cos(\lambda_{tn}(1-x)))^2 dx} \quad (3.152)$$

onde a condição de contorno variável é dada por  $f_A(\tau)$ . Analisando-se, caso-a-caso ou calculando-se as integrais pode-se verificar que

$$\frac{\int_0^1 (B_B (1-x) + k_B) (B_B \sin(\lambda_m (1-x)) + \lambda_m k_B \cos(\lambda_m (1-x))) dx}{(B_B (k_A + B_A) + k_B B_A) \int_0^1 (B_B \sin(\lambda_m (1-x)) + \lambda_m k_B \cos(\lambda_m (1-x)))^2 dx} =$$

$$\frac{2}{\lambda_m \left( (2k_A k_B + k_A B_B + B_A k_B) \lambda_m \sin(\lambda_m) - (B_A B_B + k_A B_B + B_A k_B - k_A k_B \lambda_m^2) \cos(\lambda_m) \right)} \quad (3.153)$$

e, com isso, a Eq. 3.152. pode-se reescrita na forma

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_m} \frac{\left( k_B \lambda_m \cos((1-x)\lambda_m) + B_B \sin((1-x)\lambda_m) \right) \left( e^{-\lambda_m^2 \tau} \int_0^{\tau} f_A(u) \lambda_m^2 e^{\lambda_m^2 u} du \right)}{\left( (2k_A k_B + k_A B_B + B_A k_B) \lambda_m \sin(\lambda_m) - (B_A B_B + k_A B_B + B_A k_B - k_A k_B \lambda_m^2) \cos(\lambda_m) \right)} \quad (3.154)$$

que é exatamente igual a solução geral obtida pelo método de Laplace na situação de tempo longo (Eq.3.41). Com isso, as soluções obtidas por separação de variáveis passam a ser matematicamente idênticas aquelas obtidas pelo método de Laplace na situação de tempo longo. Por esse motivo, quando da comparação entre as soluções somente serão consideradas as soluções desenvolvidas pelo método de Laplace, embora os comentários e avaliações sejam pertinentes aos dois métodos.

#### 3.4.1.5 Sólido Semi-Infinito

No caso de sólido semi-infinito, o método de separação de variáveis apresenta algumas particularidades. Partindo-se da equação de condução de calor unidimensional, propõe-se que a solução seja o produto de duas funções, uma com dependência espacial e a outra temporal. A equação bem como as condições de contorno são divididas obtendo-se assim dois problemas. As soluções dos problemas separadamente não oferecem maiores dificuldades e as soluções encontradas para o perfil de temperatura são as mesmas do método de Laplace para sólidos semi-infinitos, como era de se esperar. Assim, nenhum desenvolvimento será apresentado nessa situação, pois o que poderia ser desenvolvido já é bem conhecido da literatura (Ozisik, 1993).



### 3.5 BALANÇO INTEGRAL DO CALOR

Nesta secção será desenvolvida a solução matemática por Balanço Integral do Calor. Este desenvolvimento é a grande contribuição do presente trabalho.

#### 3.5.1 Montagem da Equação Geral

Partindo-se da equação de condução de calor unidimensional em sua forma adimensional e, conforme as descrições das etapas do método apresentadas na revisão bibliográfica, integra-se a Eq. (3.1) no espaço dentro do intervalo delimitado de  $\delta_A$  e  $\delta_B$ , que são a forma adimensional de  $\Delta_A$  e  $\Delta_B$  - apresentados no modelo físico descrito no início do capítulo, obtendo-se

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\delta_A}^{\delta_B} \theta dx = \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{\delta_A} - \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{\delta_B} \quad (3.155)$$

Enquanto que na literatura (Goodman, 1964) normalmente um polinômio é arbitrado como perfil de temperaturas, no presente trabalho, arbitra-se a seguinte distribuição:

$$\theta = \varphi_1 \left( \frac{\delta_B - x}{\delta_B - \delta_A} \right)^n + \varphi_2 \left( \frac{\delta_B - x}{\delta_B - \delta_A} \right) + \varphi_3 \quad (3.156)$$

onde as variáveis  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$  são coeficientes a serem ajustados a partir das condições de contorno e a variável  $n$  (um número real) indica o formato da curva de temperatura utilizada, conforme pode ser melhor observado na Fig. 3-2. Observa-se nesta figura que a função arbitrada pode ser interpretada como a justaposição de três diferentes perfis: um perfil dado por uma função de grau  $n$ , um segundo perfil linear e um terceiro de valor constante. O perfil linear e o valor constante são essenciais para satisfazer as condições de contorno na fronteira B, enquanto que o perfil exponencial satisfaz o balanço de energia devido às condições de contorno aplicadas às duas fronteiras.

O melhor ajuste da função de distribuição de temperatura arbitrado em relação à distribuição real se dá a partir da escolha adequada do parâmetro  $n$ , o qual varia de acordo as condições de

contorno a que o sólido está sujeito. Uma das maiores deficiências do método integral é que o perfil de temperaturas é sempre polinomial, independente das condições de contorno do sólido. Desta forma, a grande contribuição do presente trabalho é justamente a atribuição de diferentes valores deste parâmetro, de forma a se obter a melhor distribuição de temperaturas.

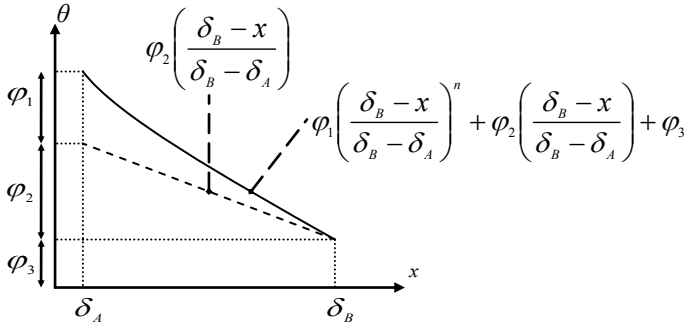


Figura 3-2 – Representação gráfico do perfil de temperatura arbitrado para o HBIM

Substituindo o perfil da Eq. 3.156 na Eq. 3.155 e realizando as operações indicadas (derivadas e integrações), conforme a terceira etapa do desenvolvimento do método, obtêm-se a expressão

$$\frac{d}{d\tau} \left( \left( \frac{\varphi_1}{n+1} + \frac{\varphi_2}{2} + \varphi_3 \right) (\delta_B - \delta_A) \right) = \frac{\varphi_1 n}{(\delta_B - \delta_A)} \quad (3.157)$$

Das condições de contorno têm-se

$$-k_A \frac{\partial \theta}{\partial x} + B_A \theta = f_A \quad \text{em } x = \delta_A \quad (3.158.a)$$

$$k_B \frac{\partial \theta}{\partial x} + B_B \theta = 0 \quad \text{em } x = \delta_B \quad (3.158.b)$$

Inserindo-se a Eq. 3.160 na Eq. 3.162.b obtêm-se a expressão

$$-k_B \frac{\varphi_2}{(\delta_B - \delta_A)} + B_B \varphi_3 = 0 \quad (3.159)$$

que tem como solução, através da definição de uma nova variável auxiliar  $\varphi_0$  as seguintes relações

$$\varphi_2 = B_B \varphi_0 \quad (3.160)$$

e

$$\varphi_3 = \frac{k_B}{(\delta_B - \delta_A)} \varphi_0 \quad (3.161)$$

Substituindo-se as relações 3.160 e 3.161 nas Eqs. 3.156 e 3.157 obtêm-se, respectivamente

$$\theta = \varphi_1 \left( \frac{\delta_B - x}{\delta_B - \delta_A} \right)^n + \left( B_B \left( \frac{\delta_B - x}{\delta_B - \delta_A} \right) + \frac{k_B}{(\delta_B - \delta_A)} \right) \quad (3.162)$$

e

$$\frac{d}{d\tau} \left( \left( \frac{\varphi_1}{n+1} + \frac{B_B \varphi_0}{2} \right) (\delta_B - \delta_A) + k_B \varphi_0 \right) = \frac{\varphi_1 n}{(\delta_B - \delta_A)} \quad (3.163)$$

Agora utiliza-se a condição de contorno dada pela Eq. (3.158.a) com o perfil dado pela Eq. 3.162 obtendo-se, após algum algebrismo simples, a expressão

$$\varphi_1 = \frac{f_A (\delta_B - \delta_A) - (k_A B_B + B_A B_B (\delta_B - \delta_A) + B_A k_B) \varphi_0}{n \left( k_A + B_A \frac{(\delta_B - \delta_A)}{n} \right)} \quad (3.164)$$

Finalmente substitui-se a Eq. 3.162 na Eq. 3.160 para obter-se a expressão para temperatura

$$\theta = \frac{f_A (\delta_B - \delta_A)}{n \left( k_A + B_A \frac{(\delta_B - \delta_A)}{n} \right)} \left( \frac{\delta_B - x}{\delta_B - \delta_A} \right)^n + \left( B_B \left( \frac{\delta_B - x}{\delta_B - \delta_A} \right) + \frac{k_B}{(\delta_B - \delta_A)} - \frac{(k_A B_B + B_A B_B (\delta_B - \delta_A) + B_A k_B)}{n \left( k_A + B_A \frac{(\delta_B - \delta_A)}{n} \right)} \left( \frac{\delta_B - x}{\delta_B - \delta_A} \right)^n \right) \varphi_0 \quad (3.165)$$

e na Eq. 3.163 para se obter

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{f_A (\delta_B - \delta_A)^2}{\left( k_A + B_A \frac{(\delta_B - \delta_A)}{n} \right) n(n+1)} + \left( \frac{2k_B + B_B (\delta_B - \delta_A)}{2} - \frac{(k_A B_B + B_A B_B (\delta_B - \delta_A) + B_A k_B) (\delta_B - \delta_A)}{\left( k_A + B_A \frac{(\delta_B - \delta_A)}{n} \right) n(n+1)} \right) \varphi_0 \right) = \frac{f_A}{\left( k_A + B_A \frac{(\delta_B - \delta_A)}{n} \right)} - \frac{(k_A B_B + B_A B_B (\delta_B - \delta_A) + B_A k_B)}{\left( k_A + B_A \frac{(\delta_B - \delta_A)}{n} \right) (\delta_B - \delta_A)} \varphi_0$$

(3.166)



A Eq. 3.165 é o perfil de temperatura arbitrado após o ajuste dos coeficientes as condições de contorno e será chamado de perfil básico deste ponto em diante. Na expressão do perfil básico aparecem as variáveis  $f_A$ ,  $k_A$ ,  $k_B$ ,  $B_A$  e  $B_B$  que são fornecidas na definição das condições de contorno específicas do problema que será resolvido. Entretanto, as variáveis  $\delta_A$ ,  $\delta_B$  e  $\varphi_0$  podem ou não serem fornecidas. Usualmente duas são fornecidas e a terceira é calculada com o uso da Eq. 3.166, que será chamada de agora em diante de equação principal e servirá de referência aos desenvolvimentos de soluções de cada caso analisado.

Finalmente, a variável  $n$  é objeto de um estudo específico no presente trabalho, pois com ela é feito o ajuste da solução e, conseqüentemente, minimizado o erro de aproximação da solução. Existem duas abordagens para a determinação do valor de  $n$ . A primeira consiste na comparação direta da solução obtida com a solução encontrada por um dos outros métodos. A segunda é através do procedimento desenvolvido por Langford (1973) em que o erro inerente a aproximação do método é calculada através do mínimo quadrado em relação à equação de condução original. A primeira abordagem é utilizada para se obter o valor de  $n$ , enquanto que a segunda para se aferir um valor numérico para o erro cometido ao se adotar este valor.

### 3.5.2 Sólido Semi-Infinito

Considera-se um sólido, sujeito a um fluxo de calor na superfície A em regime transiente, como semi-infinito durante o período em que a superfície B ainda não sentiu a ação da fonte de calor. Desta forma, as condições na superfície B permanecem inalteradas, ou seja, sujeitas a temperatura inicial. No instante em que a temperatura da superfície B sofre uma mudança de temperatura (este instante é determinado pela solução do problema semi-infinito), o sólido passa a ser considerado finito, uma vez que as duas condições de contorno devem ser avaliadas na formulação do problema. Nesta seção, os problemas do sólido semi-infinito serão tratados e na próxima seção, do sólido finito.

Para a família de problemas do sólido semi-infinito, considera-se que a superfície A está na origem, i.e.  $\delta_A = 0$ , e que a superfície B encontra-se sobre o ponto de penetração do calor,  $\delta_B = \delta$ . Além disso, pela definição do ponto de penetração do calor tem-se que a temperatura nesse ponto é igual a zero, o que leva a Eq. 3.162 a:

$$\frac{k_B}{\delta} \varphi_0 = 0 \quad (3.167)$$

que implica que, para a situação de sólido semi-infinito,  $\varphi_0 = 0$ . Como adotado neste trabalho, a função de aquecimento da superfície A é dada por  $f_A = f_0 \tau^m$ . A partir dessas definições o perfil de temperatura básico, dado pela Eq. 3.171, pode ser expresso pela expressão:

$$\theta = \frac{f_0 \tau^m \delta}{n \left( k_A + B_A \frac{\delta}{n} \right)} \left( 1 - \frac{x}{\delta} \right)^n \quad (3.168)$$

e a equação principal (Eq. 3.166) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\tau^m \delta^2}{\left( k_A + B_A \frac{\delta}{n} \right) n(n+1)} \right) = \frac{\tau^m}{\left( k_A + B_A \frac{\delta}{n} \right)} \quad (3.169)$$

A Eq. 3.169 é usada para calcular a posição exata do ponto de penetração do calor em função do tempo, considerando-se que inicialmente ele esteja sobre a superfície A, i.e  $\delta(0) = 0$ . É importante notar que o perfil de temperatura básico só é definido para valores de posição menores que o ponto de penetração do calor; para valores maiores o perfil assume valor zero.

### 3.5.2.1 Temperatura Prescrita:

Para a situação de temperatura prescrita têm-se os parâmetros:  $k_A = 0$ ,  $B_A = 1$  e  $f_0 = \theta_A$ . Assim a Eq. 3.19 assume a forma:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\tau^m \delta}{(n+1)} \right) = \frac{n \tau^m}{\delta} \quad (3.170)$$

que pode ser resolvida para  $\delta$  por separação de variáveis obtendo-se:

$$\delta^2 = \frac{n(n+1)\tau}{(m+1/2)} \quad (3.171)$$

O perfil de temperatura básico, conforme explicado anteriormente, só é definido para valores de posição menores que o ponto de penetração do calor, para posições maiores ele é igual a zero. Assim, substituindo-se a Eq. 3.171 no perfil de temperatura básico (Eq.3.168), obtêm-se a função por partes:

$$\theta = \begin{cases} \theta_A \tau^m \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{\frac{n(n+1)\tau}{(m+1/2)}}} \right)^n, & x \leq \sqrt{\frac{n(n+1)\tau}{(m+1/2)}} \\ 0 & , x > \sqrt{\frac{n(n+1)\tau}{(m+1/2)}} \end{cases} \quad (3.172)$$

que descreve a temperatura em todo o sólido. A partir da Eq. 3.172 o fluxo na superfície pode ser calculado pela expressão

$$-\frac{\partial \theta}{\partial x} = \theta_A \tau^m \sqrt{\frac{n(m+1/2)}{(n+1)\tau}} \quad (3.173)$$

Derivando-se no espaço a solução obtida por Laplace em tempo curto para a mesma condição de contorno, dada pela Eq. 3.15, avaliando-a no ponto  $x=0$  e usando-se a relação

$erfc(a, 0) = 1 / \left( 2^a \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right) \right)$  (Abramowitz, 1972), pode-se obter a

seguinte expressão para o fluxo de calor na superfície:

$$-\frac{\partial \theta}{\partial x} = \theta_A \tau^m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1/2)} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \quad (3.174)$$

Igualando-se as Eqs. 3.173 e 3.174 encontra-se após algum algebrismo a relação

$$\frac{(n+1)}{n} = (m+1/2) \left( \frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m+1)} \right)^2 \quad (3.175)$$

a partir da qual determina-se o valor de  $n$  de forma a que o fluxo de superfície calculado pela solução seja idêntico ao obtido pela solução de Laplace de tempo curto.

### 3.5.2.2 Fluxo Prescrito:

No caso do fluxo prescrito os parâmetros da fronteira são:  $k_A=1$ ,  $B_A=0$  e  $f_0=Q_A$ . Assim a equação diferencial básica pode ser reescrita:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\tau^m \delta^2}{n(n+1)} \right) = \tau^m \quad (3.176)$$

Esta equação pode ser resolvida por separação de variáveis, resultando numa equação semelhante a Eq. 3.171:

$$\delta^2 = \frac{n(n+1)\tau}{(m+1)} \quad (3.177)$$

O perfil de temperatura, dado pela Eq. 3.168, então pode ser escrito na forma:

$$\theta = \begin{cases} Q_A \tau^m \sqrt{\frac{(n+1)\tau}{n(m+1)}} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{\frac{n(n+1)\tau}{(m+1)}}} \right)^n, & x \leq \sqrt{\frac{n(n+1)\tau}{(m+1)}} \\ 0 & , x > \sqrt{\frac{n(n+1)\tau}{(m+1)}} \end{cases} \quad (3.178)$$

e a temperatura de superfície obtida pela expressão:

$$\theta = Q_A \tau^m \sqrt{\frac{(n+1)\tau}{n(m+1)}} \quad (3.179)$$

De forma similar ao que foi feito para a situação de temperatura prescrita, a solução obtida pelo método de Laplace tempo curto para o caso de fluxo prescrito, Eq. 3.17, é usada para calcular a temperatura na superfície,  $x=0$ , obtendo-se

$$\theta = Q_A \tau^m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+3/2)} \sqrt{\tau} \quad (3.180)$$

Compara-se as Eqs. 3.179 e 3.180 para obter, após manipulação algébrica, a expressão:

$$\frac{(n+1)}{n} = (m+1) \left( \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+3/2)} \right)^2 \quad (3.181)$$

Desta última expressão se calcula o valor de  $n$  para que a temperatura de superfície calculada pelo HBIM seja idêntica ao valor obtido pela solução de Laplace de tempo curto.

### 3.5.2.3 Convecção:

Por último, no caso de sólido semi-infinito sujeito a convecção na superfície, os parâmetros assumem os valores  $k_A=1$ ,  $B_A=Bi$  e  $f_0=Bi\theta_\infty$ . Assim, a Eq. 3.169 torna-se:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\tau^m \delta^2}{\left(1 + Bi \frac{\delta}{n}\right) n(n+1)} \right) = \frac{\tau^m}{\left(1 + Bi \frac{\delta}{n}\right)} \quad (3.182)$$

Neste caso adotar-se-á um procedimento diferente. A partir dos resultados obtidos para temperatura prescrita e fluxo prescrito, Eqs. 3.171 e 3.177 respectivamente, propõem-se que a solução do ponto de penetração do calor seja da forma

$$\delta^2 = \frac{n(n+1)\tau}{\phi} \quad (3.183)$$

onde a variável  $\phi$  deve ser determinada. No caso de temperatura prescrita  $\phi = m + 1/2$  e para fluxo prescrito  $\phi = m + 1$ . Outra verificação interessante é que, a partir da comparação das Eqs. 3.175 e 3.181, pode-se escrever que:

$$\frac{(n+1)}{n} = \phi \left( \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\phi+1/2)} \right)^2 \quad (3.184)$$

Assim, substituindo as Eqs. 3.183 e 3.184 na Eq. 3.182, obtêm-se a equação

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\tau^m}{\left( 1 + Bi\sqrt{\tau} \left( \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\phi+1/2)} \right) \right) \phi} \right) = \frac{\tau^m}{\left( 1 + Bi\sqrt{\tau} \left( \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\phi+1/2)} \right) \right)} \quad (3.185)$$

Agora, a partir da solução calculada pelo método de Laplace em tempo curto para a condição de convecção, Eq. 3.19, pode-se calcular a temperatura de superfície

$$\theta = \frac{\theta_\infty \Gamma(m+1)}{(-Bi)^{2m}} \left( \sum_{r=0}^{2m} \frac{(-Bi\sqrt{\tau})^r}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} - e^{Bi^2\tau} \operatorname{erfc}(Bi\sqrt{\tau}) \right) \quad (3.186)$$

bem como o fluxo de superfície

$$-\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{Bi\theta_\infty \Gamma(m+1)}{(-Bi)^{2m}} \left( \sum_{r=1}^{2m} \frac{(-Bi\sqrt{\tau})^{r-1}}{\Gamma\left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2}\right)} - e^{Bi^2\tau} \operatorname{erfc}(Bi\sqrt{\tau}) \right) \quad (3.187)$$

e a razão entre as duas é dada por

$$\frac{-\frac{\partial \theta}{\partial x}}{\theta} = \frac{Bi \left( e^{Bi^2\tau} \operatorname{erfc}(Bi\sqrt{\tau}) - \sum_{r=0}^{2m-1} \frac{(-Bi\sqrt{\tau})^r}{\Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)} \right)}{\left( \sum_{r=0}^{2m} \frac{(-Bi\sqrt{\tau})^r}{\Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)} - e^{Bi^2\tau} \operatorname{erfc}(Bi\sqrt{\tau}) \right)} \quad (3.188)$$

Fazendo o mesmo com o perfil básico, Eq. 3.168, após a substituição dos parâmetros de fronteira e usando as relações dadas pelas Eqs. 3.183 e 3.184. Tem-se a expressão

$$\frac{-\frac{\partial \theta}{\partial x}}{\theta} = \frac{\Gamma(\phi + 1/2)}{\Gamma(\phi)\sqrt{\tau}} \quad (3.189)$$

Igualando-se as Eqs. 3.188 e 3.189 tem-se que

$$\frac{\Gamma(\phi+1/2)}{\Gamma(\phi)} = \frac{Bi\sqrt{\tau} \left( e^{Bi^2\tau} \operatorname{erfc}(Bi\sqrt{\tau}) - \sum_{r=0}^{2m-1} \frac{(-Bi\sqrt{\tau})^r}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} \right)}{\left( \sum_{r=0}^{2m} \frac{(-Bi\sqrt{\tau})^r}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} - e^{Bi^2\tau} \operatorname{erfc}(Bi\sqrt{\tau}) \right)} \quad (3.190)$$

e inserindo-se a expressão acima na Eq. 3.185, após uma série de manipulações algébricas a seguinte equação diferencial é obtida

$$\frac{d}{d\tau} \left( \left( e^{Bi^2\tau} \operatorname{erfc}(Bi\sqrt{\tau}) - \sum_{r=0}^{2m-1} \frac{(-Bi\sqrt{\tau})^r}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} \right) \frac{\tau}{\phi} \right) = \left( e^{Bi^2\tau} \operatorname{erfc}(Bi\sqrt{\tau}) - \sum_{r=0}^{2m-1} \frac{(-Bi\sqrt{\tau})^r}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} \right) \quad (3.191)$$

A Eq. 3.191 pode ser integrada em  $\tau$ , donde se obtém, após manipulações algébricas (Abramowitz, 1972), a expressão

$$\phi = Bi^2\tau \frac{\left( e^{Bi^2\tau} \operatorname{erfc}(Bi\sqrt{\tau}) - \sum_{r=0}^{2m-1} \frac{(-Bi\sqrt{\tau})^r}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} \right)}{\left( e^{Bi^2\tau} \operatorname{erfc}(Bi\sqrt{\tau}) - \sum_{r=0}^{2m+1} \frac{(-Bi\sqrt{\tau})^r}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} \right)} \quad (3.192)$$

que é a solução procurada. Com essa solução pode-se obter uma expressão para  $n$  a partir da Eq. 3.184 e, então, para  $\delta$  usando-se a Eq. 3.183. Essas duas soluções podem ser inseridas no perfil básico dado pela Eq. 3.168, para obtenção da distribuição de temperatura para o caso convectivo, que no presente caso é dada por



$$\theta = \frac{Bi \theta_{\infty} \tau^m \Gamma(\phi) \sqrt{\tau}}{\Gamma(\phi + 1/2) + Bi \Gamma(\phi) \sqrt{\tau}} \left( 1 - \frac{x}{\frac{\Gamma(\phi) \Gamma(\phi + 1/2) \sqrt{\tau}}{\phi \Gamma(\phi)^2 - \Gamma(\phi + 1/2)^2}} \right)^{\frac{\Gamma(\phi + 1/2)^2}{\phi \Gamma(\phi)^2 - \Gamma(\phi + 1/2)^2}} \quad (3.193)$$

### 3.5.3 Sólido Finito

Para o caso de sólido finito considera-se que a superfície A está sobre a origem, i.e.  $\delta_A = 0$  e que a superfície B está sobre a parte posterior do sólido, ou seja,  $\delta_B = 1$ . Considera-se, por uma questão de continuidade com o modelo de sólido semi-infinito, que o período da solução do sólido semi-infinito se inicia no instante  $\tau_0$ , em que o ponto de penetração do calor atinge o valor 1. Usando-se as relações das Eqs. 3.183 e 3.184 têm-se:

$$\tau_0 = \left( \frac{\left( \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\phi + 1/2)} \right)^2 - 1}{\left( \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\phi + 1/2)} \right)} \right)^2 \quad (3.194)$$

Pelo mesmo motivo arbitra-se que o expoente  $n$  será o mesmo calculado no período semi-infinito no instante em que se iniciar o período finito. Desse modo todas as variáveis, com exceção de  $\varphi_0$  e  $f_A$ , são consideradas constantes. Para  $f_A$  dada na forma  $f_0 \tau^m$ , a equação principal, Eq. 3.170 pode ser reescrita na forma:

$$\left( \frac{(nk_A + B_A)(2k_B + B_B)}{2n} - \frac{(k_A B_B + B_A B_B + B_A k_B)}{n(n+1)} \right) \frac{d\varphi_0}{d\tau} + (k_A B_B + B_A B_B + B_A k_B) \varphi_0 = f_0 \tau^m - \frac{m f_0}{n(n+1)} \tau^{m-1} \quad (3.195)$$

para o cálculo de  $\varphi_0$ , com condição inicial que  $\varphi_0(\tau_0) = 0$ . A Eq. 3.195 pode ser rearranjada

$$J_1 \frac{d\varphi_0}{d\tau} + J_2 \varphi_0 = G \quad (3.196)$$

onde as duas variáveis,  $J_1$  e  $J_2$ , possuem valores constantes definidos conforme a condição de contorno pelas expressões

$$J_1 = \frac{(nk_A + B_A)(2k_B + B_B)}{2n} - \frac{(k_A B_B + B_A B_B + B_A k_B)}{n(n+1)} \quad (3.197)$$

e

$$J_2 = (k_A B_B + B_A B_B + B_A k_B) \quad (3.198)$$

e a variável  $G$  é definida pela fórmula

$$G = f_0 \tau^m - \frac{m f_0}{n(n+1)} \tau^{m-1} \quad (3.199)$$

A Eq. 3.196 é uma equação linear de primeira ordem, cuja solução é obtida em Spiegel (1973). Após algumas manipulações, esta solução pode ser apresentada na forma:

$$\varphi_0 = \left( \int_{\tau_0}^{\tau} \left( f_0 \bar{\tau}^m - \frac{m f_0}{n(n+1)} \bar{\tau}^{m-1} \right) \exp\left(\frac{J_2 \bar{\tau}}{J_1}\right) d\bar{\tau} \right) \exp\left(-\frac{J_2 \tau}{J_1}\right) \quad (3.200)$$

Esta expressão pode ser integrada, gerando a seguinte solução final:

$$\varphi_0 = f_0 \Gamma(m+1) \left( -\frac{J_1}{J_2} \right)^m \left( \frac{J_1}{J_2} + \frac{1}{n(n+1)} \right) \left( P \left( m+1, -\frac{J_2 \tau_0}{J_1} \right) - P \left( m+1, -\frac{J_2 \tau}{J_1} \right) \right) \exp \left( -\frac{J_2 \tau}{J_1} \right) \quad (3.201)$$

onde a função  $P(a, x)$  é a função gamma incompleta conforme apresentado por Abramowitz(1972). Com essa solução o perfil de temperatura básico é dado por:

$$\theta = \frac{f_0 \tau^m (1-x)^n}{(nK_A + B_A)} + \left( B_B (1-x) + K_B - \frac{(K_A B_B + B_A B_B + B_A K_B)(1-x)^n}{(nK_A + B_A)} \right) f_0 \Gamma(m+1) \left( -\frac{J_1}{J_2} \right)^m \left( \frac{J_1}{J_2} + \frac{1}{n(n+1)} \right) \left( P \left( m+1, -\frac{J_2 \tau_0}{J_1} \right) - P \left( m+1, -\frac{J_2 \tau}{J_1} \right) \right) \exp \left( -\frac{J_2 \tau}{J_1} \right) \quad (3.202)$$

que pode ser analisada para cada combinação de condições de contorno, conforme se verá a seguir nesta seção.

### 3.5.3.1 Temperatura Prescrita/Temperatura Prescrita:

Para a distribuição de temperatura para o caso representado pela combinação de temperatura prescrita em ambas superfícies, têm-se os seguintes parâmetros:  $k_A=0$ ,  $k_B=0$ ,  $B_A=1$ ,  $B_B=1$  e  $f_0=\theta_A$ . Com isso, é possível determinar os valores de  $J_1$  e  $J_2$ , no presente caso:  $J_1 = \frac{(n-1)}{2n(n+1)}$  e  $J_2 = 1$ . Substituindo-se esses valores na Eq.

3.202 se obtêm o perfil de temperaturas:

$$\theta = \theta_A \tau^m (1-x)^n + \left( (1-x) - (1-x)^n \right) \theta_A \Gamma(m+1) \left( -\frac{n-1}{2n(n+1)} \right)^m \left( \frac{1}{2n} \right) \left( P\left(m+1, -\frac{2n(n+1)\tau_0}{(n-1)}\right) - P\left(m+1, -\frac{2n(n+1)\tau}{(n-1)}\right) \right) \exp\left(-\frac{2n(n+1)\tau}{(n-1)}\right) \quad (3.203)$$

### 3.5.3.2 Temperatura Prescrita/Fluxo Prescrito:

Para a distribuição de temperatura em um sólido sujeito às condições de contorno temperatura prescrita na superfície A e fluxo prescrito na superfície B, adota-se os seguintes valores para as constantes:  $k_A=0$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=1$ ,  $B_B=0$  e  $f_0=\theta_A$  são usados, calculando-se os valores de  $J_1$  e  $J_2$ , no presente caso:  $J_1 = \frac{1}{(n+1)}$  e  $J_2 = 1$ .

Substituindo-se esses valores na Eq. 3.202 obtêm-se o perfil, que tem a forma:

$$\theta = \theta_A \tau^m (1-x)^n + \left( 1 - (1-x)^n \right) \theta_A \Gamma(m+1) \left( -\frac{1}{(n+1)} \right)^m \left( \frac{1}{n} \right) \left( P(m+1, -(n+1)\tau_0) - P(m+1, -(n+1)\tau) \right) \exp(-(n+1)\tau) \quad (3.204)$$

### 3.5.3.3 Temperatura Prescrita/Convecção:

A solução para a distribuição de temperatura no sólido para as condições temperatura prescrita na superfície A e convecção na superfície B são reconstruídas usando-se os seguintes coeficientes:  $k_A=0$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=1$ ,  $B_B=Bi$  e

$f_0 = \theta_A$ . Assim, os valores  $J_1 = \frac{(2 + Bi)(n+1) - 2(Bi+1)}{2n(n+1)}$  e  $J_2 = (Bi+1)$  são calculados, empregando-se as Eqs. 3.197 e 3.196, e substituídos na Eq. 3.202, que pode ser reescrita como:

$$\theta = \theta_A \tau^m (1-x)^n + \left( Bi(1-x) + 1 - (Bi+1)(1-x)^n \right) \theta_A \Gamma(m+1) \left( -\frac{(2+Bi)(n+1) - 2(Bi+1)}{2n(n+1)(Bi+1)} \right)^m \cdot \left( \frac{(2+Bi)}{2n(Bi+1)} \right) \left( P \left( m+1, -\frac{2n(n+1)(Bi+1)\tau_0}{(2+Bi)(n+1) - 2(Bi+1)} \right) - P \left( m+1, -\frac{2n(n+1)(Bi+1)\tau}{(2+Bi)(n+1) - 2(Bi+1)} \right) \right) \exp \left( -\frac{2n(n+1)(Bi+1)\tau}{(2+Bi)(n+1) - 2(Bi+1)} \right) \quad (3.205)$$

#### 3.5.3.4 Fluxo Prescrito/Temperatura Prescrita:

Para o problema cujas condições de contorno são fluxo prescrito na superfície A e temperatura prescrita na superfície B empregam-se os seguintes valores para os coeficientes:  $k_A = 1$ ,  $k_B = 0$ ,  $B_A = 0$ ,  $B_B = 1$  e  $f_0 = Q_A$ . Com isso, determina-se os parâmetros  $J_1$  e  $J_2$ , obtendo-se  $J_1 = \frac{n(n+1) - 2}{2n(n+1)}$  e  $J_2 = 1$ . Todos esses valores são substituídos na Eq. 3.202, de onde obtêm-se a expressão:

$$\theta = \frac{Q_A \tau^m (1-x)^n}{n} + \left( (1-x) - \frac{(1-x)^n}{n} \right) \frac{Q_A}{2} \Gamma(m+1) \left( -\frac{n(n+1) - 2}{2n(n+1)} \right)^m \left( P \left( m+1, -\frac{2n(n+1)\tau_0}{n(n+1) - 2} \right) - P \left( m+1, -\frac{2n(n+1)\tau}{n(n+1) - 2} \right) \right) \exp \left( -\frac{2n(n+1)\tau}{n(n+1) - 2} \right) \quad (3.206)$$

### 3.5.3.5 Fluxo Prescrito/Fluxo Prescrito:

Para as condições de contorno fluxo prescrito em ambas as superfícies do sólido, deve-se empregar a Eq. 3.206, onde os parâmetros assumem os valores:  $k_A=1$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=0$ ,  $B_B=0$  e  $f_0=Q_A$ . Neste caso, a variável  $J_2$  torna-se nula e, conseqüentemente, uma divisão por zero surge quando os valores são substituídos na Eq.3.206. Por isso, neste caso, emprega-se a Eq. 3.199, que uma vez substituídos os valores, fica na forma:

$$\frac{d \varphi_0}{d \tau} = Q_A \tau^m - \frac{m Q_A}{n(n+1)} \tau^{m-1} \quad (3.207)$$

que pode ser resolvida por integração obtendo-se como solução

$$\varphi_0 = \frac{Q_A \tau^{m+1}}{(m+1)} \left( 1 - \frac{m+1}{n(n+1)\tau} \right). \quad (3.208)$$

Com esta expressão para o parâmetro  $\varphi_0$ , pode-se substituir na Eq. 3.165, resultando no seguinte perfil de temperaturas:

$$\theta = \frac{Q_A}{n} (1-x)^n + \frac{Q_A \tau^{m+1}}{(m+1)} \left( 1 - \frac{m+1}{n(n+1)\tau} \right) \quad (3.209)$$

### 3.5.3.6 Fluxo Prescrito/Convecção:

Para a distribuição de temperatura no sólido sujeito as condições de fluxo na superfície A e convecção na superfície B, deve-se empregar os valores  $k_A=1$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=0$ ,  $B_B=Bi$  e  $f_0=Q_A$  na Eq. 3.202 e nas Eqs. 3.197 e 3.198 para determinar os valores dos parâmetros:  $J_1 = \frac{(2+Bi)n(n+1)-2Bi}{2n(n+1)}$  e  $J_2 = Bi$ . Desta forma, o perfil de temperaturas pode, então, ser apresentado por:

$$\theta = \frac{Q_A \tau^m (1-x)^n}{n} + \left( Bi(1-x) + 1 - \frac{Bi}{n}(1-x)^n \right) \exp\left( -\frac{2n(n+1)Bi\tau}{(2+Bi)n(n+1)-2Bi} \right) Q_A \Gamma(m+1) \quad (3.210)$$

$$\left( -\frac{(2+Bi)n(n+1)-2Bi}{2n(n+1)Bi} \right)^m \left( \frac{2+Bi}{2Bi} \right) \left( P\left( m+1, -\frac{2n(n+1)Bi\tau_0}{(2+Bi)n(n+1)-2Bi} \right) - P\left( m+1, -\frac{2n(n+1)Bi\tau}{(2+Bi)n(n+1)-2Bi} \right) \right)$$

### 3.5.3.7 Convecção/Temperatura Prescrita:

O perfil de temperaturas, resultante das condições de convecção na superfície A e temperatura prescrita na superfície B, é obtido pela substituição dos valores dos coeficientes  $k_A=1$ ,  $k_B=0$ ,  $B_A=Bi$ ,  $B_B=1$  e  $f_0=Bi\theta_\infty$ , na Eq. 3.202. Para esses parâmetros, determinam-se os valores  $J_1 = \frac{(n+Bi)(n+1)-2(1+Bi)}{2n(n+1)}$  e  $J_2 = (1+Bi)$ , com os quais pode-se obter a seguinte equação:

$$\theta = \frac{Bi \theta_\infty \tau^m (1-x)^n}{(n+Bi)} + \left( (1-x) - \frac{(1+Bi)(1-x)^n}{(n+Bi)} \right) \exp \left( - \frac{2n(n+1)(1+Bi)\tau}{(n+Bi)(n+1)-2(1+Bi)} \right) Bi \theta_\infty \Gamma(m+1).$$

$$\left( - \frac{(n+Bi)(n+1)-2(1+Bi)}{2n(n+1)(1+Bi)} \right)^m \left( \frac{(n+Bi)}{2n(1+Bi)} \right) \left( P \left( m+1, - \frac{2n(n+1)(1+Bi)\tau_0}{(n+Bi)(n+1)-2(1+Bi)} \right) - P \left( m+1, - \frac{2n(n+1)(1+Bi)\tau}{(n+Bi)(n+1)-2(1+Bi)} \right) \right)$$
(3.211)

### 3.5.3.8 Convecção/Fluxo Prescrito:

Já no caso do sólido sujeito a convecção e fluxo prescrito, nas superfícies A e B, respectivamente, deve-se empregar os seguintes valores aos coeficientes  $k_A=1$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=Bi$ ,  $B_B=0$  e  $f_0=Bi\theta_\infty$ . Os parâmetros  $J_1 = \frac{(n+Bi)2(n+1)-2Bi}{2n(n+1)}$  e  $J_2 = Bi$  são obtidos. Substituindo esses valores e expressões na Eq. 3.202, o perfil de temperatura passa a ser dado pela equação:

$$\theta = \frac{Bi \theta_\infty \tau^m (1-x)^n}{(n+Bi)} + \left( 1 - \frac{Bi(1-x)^n}{(n+Bi)} \right) \exp \left( - \frac{2n(n+1)Bi\tau}{(n+Bi)2(n+1)-2Bi} \right) Bi \theta_\infty \Gamma(m+1).$$

$$\left( - \frac{(n+Bi)2(n+1)-2Bi}{2n(n+1)Bi} \right)^m \left( \frac{(n+Bi)}{nBi} \right) \left( P \left( m+1, - \frac{2n(n+1)Bi\tau_0}{(n+Bi)2(n+1)-2Bi} \right) - P \left( m+1, - \frac{2n(n+1)Bi\tau}{(n+Bi)2(n+1)-2Bi} \right) \right)$$
(3.212)



### 3.5.3.9 Convecção/Convecção:

Por fim, a combinação dos coeficientes  $k_A=1$ ,  $k_B=1$ ,  $B_A=Bi$ ,  $B_B=Bi$  e  $f_0=Bi\theta_\infty$  constroem as condições de convecção em ambas as faces em um sólido. Com isso, pode-se calcular os parâmetros  $J_1 = \frac{(n+Bi)(2+Bi)(n+1)-2(2+Bi)Bi}{2n(n+1)}$  e  $J_2 = (2+Bi)Bi$ , com os quais se determina o perfil de temperatura a partir da Eq. 3.202, obtendo-se:

$$\theta = \frac{Bi\theta_\infty\tau^m(1-x)^n}{(n+Bi)} + \left( Bi(1-x) + 1 - \frac{(2+Bi)Bi(1-x)^n}{(n+Bi)} \right) \exp\left( -\frac{2n(n+1)(2+Bi)Bi\tau}{(n+Bi)(2+Bi)(n+1)-2(2+Bi)Bi} \right) Bi\theta_\infty \Gamma(m+1) \left( \frac{(n+Bi)}{2nBi} \right) \left( -\frac{(n+Bi)(2+Bi)(n+1)-2(2+Bi)Bi}{2n(n+1)(2+Bi)Bi} \right)^m \left( P\left( m+1, -\frac{2n(n+1)(2+Bi)Bi\tau_0}{(n+Bi)(2+Bi)(n+1)-2(2+Bi)Bi} \right) - P\left( m+1, -\frac{2n(n+1)(2+Bi)Bi\tau}{(n+Bi)(2+Bi)(n+1)-2(2+Bi)Bi} \right) \right) \quad (3.213)$$

É importante lembrar que todas essas soluções são válidas para a condição de sólido finito somente, para tempos  $\tau$  maiores do que  $\tau_0$ , conforme explicado anteriormente. Assim, a solução completa para a condução de calor obtida através do HBIM é composta de duas partes: a primeira para tempos menores do que  $\tau_0$ , na qual o sólido se comporta como um sólido semi-infinito, e na segunda com tempos maiores que  $\tau_0$ , na qual o sólido se comporta como um sólido finito.



## 4 ANÁLISE DE RESULTADOS

No capítulo anterior foram desenvolvidos quatro tipos de soluções para o problema de condução de calor unidimensional, são elas: Método de Laplace em Tempo Curto, chamado de agora em diante de LTC; Método de Laplace em Tempo Longo, denominado de LTL; Método de Separação de Variáveis; e Método do Balanço Integral do Calor, ou HBIM como definido anteriormente. As soluções obtidas através do Método de Separação de Variáveis serão desconsideradas da presente análise por possuir formulação matemática idêntica a solução obtida pelo LTL, conforme demonstrado no Capítulo 3.

Três casos foram considerados para realizar uma comparação entre as diversas soluções teóricas obtidas. Para o primeiro caso, as condições de contorno foram consideradas independentes do tempo. Em seguida uma dependência linear das mesmas com o tempo foi considerada e, por último, uma condição de contorno do tipo pulso na superfície livre.

Para a comparação dos métodos desenvolvidos foram utilizadas, como referência, um conjunto de soluções numéricas obtidas a partir do método de Volumes Finitos, chamada a partir de agora de VF. Os valores de referência foram obtidos a partir da implementação do algoritmo apresentado em Maliska (1995). No presente trabalho, a solução de VF é considerada exata e as demais terão suas distribuições e valores comparados a ela. A diferença entre as soluções analíticas e a em VF será, neste trabalho, denominada de erro e será analisada a partir do erro RMS, calculado pela fórmula

$$ERRO_{RMSj} = \sum_i (M_{ij} - VF_{ij})^2 \quad (4.1)$$

onde  $VF_{ij}$  é o valor de temperatura obtido pelo método VF na posição  $i$  e no instante  $j$ ,  $M_{ij}$  é o valor de temperatura na posição  $i$  e no instante  $j$  obtido com outro método que não o VF e o erro RMS no instante  $j$  é calculado com a somatória de todas as diferenças quadráticas das posições  $i$  no mesmo instante  $j$ .

De maneira a padronizar as análises em todos os casos, foram consideradas uma malha espacial de 101 posições, incluindo as duas superfícies, para uma distância adimensionalizada de 1 e uma malha temporal de 101 instantes, incluindo o instante inicial e final. Foi empregado um tempo adimensionalizado 1, para as análises de tempo

longo e um tempo adimensionalizado 0,1, para as análises de tempo curto. O valor de 0,1 foi arbitrariamente escolhido por acreditar ser esse um valor próximo ao valor de alternância entre os métodos de solução. Para o método LTL foram considerados 100 termos e 5 termos para o LTC. Todas as análises apresentadas neste capítulo foram feitas empregando-se o Maple (software de manipulação algébrica) e os gráficos foram feitos com o auxílio do software Excel.

Como se verá neste capítulo, na maioria das vezes, os métodos clássicos apresentam resultados mais precisos; porém, deve-se ter em mente que estes resultados clássicos são obtidos empregando-se expressões matemáticas mais complexas (ver capítulo anterior), onde 5 e 100 termos de somatórias são utilizados para as soluções de tempo longo e curto, respectivamente. Já as equações empregadas para o HBIM são bem mais simples e fáceis de serem implementadas.

#### 4.1 SOLUÇÃO DE REFERÊNCIA: VOLUMES FINITOS

De maneira a garantir a hipótese de que o resultado gerado por VF é exato foi realizado um estudo de refino de malha. Assim, o número de volumes foi variado em uma proporção de 10 em 10, partindo de um conjunto de 11 volumes até um total de 101 volumes. Para análise foi considerado o erro relativo, calculado pela fórmula

$$ERRO = \left( \frac{V_k - V_{100}}{V_{100}} \right) 100 \quad (4.2)$$

onde  $V_k$  é o valor obtido com a malha de  $k$  volumes,  $V_{100}$  é o valor obtido com a malha de 101 volumes. Os valores foram comparados exatamente no centro da malha pois, por ser o ponto mais distante das fronteiras, é o que se torna mais sensível à questão da discretização espacial.

O que pôde ser verificado é que, para todos os testes realizados, o erro relativo entre a malha de 91 e o de 101 volumes é menor que 0,02% nos instantes iniciais e tende a zero para tempos maiores, o que justifica a utilização desse método como referência de comparação para os demais. Esse comportamento pode ser observado na Fig. 4.1.

#### 4.2 CASO 1 – CONDIÇÕES INDEPENDENTES DO TEMPO

A condição de contorno independente do tempo é obtida fazendo-se com que o coeficiente  $m$  da função de aquecimento, dada por  $f_0 t^m$ ,

seja igual a zero. As demais variáveis envolvidas nas condições de contorno da superfície A ( $\theta_A$ ,  $Q_A$ ,  $Bi$  e  $\theta_\infty$ ) assim como as referentes as condições de contorno da superfície B que serão utilizadas na presente análise são apresentadas na Tabela 4-1. Pode-se notar, pela Tabela 4-1, que todas as condições referentes à superfície B são consideradas homogêneas.

Tabela 4-1 – Condições de contorno das superfícies

Condição de contorno	Superfície A	Superfície B
Temperatura/Temperatura	$\theta_A = 1$	$\theta_B = 0$
Temperatura/Fluxo	$\theta_A = 1$	$Q_B = 0$
Temperatura/Convecção	$\theta_A = 1$	$\theta_{\infty B} = 0 \quad Bi = 5$
Fluxo/Temperatura	$Q_A = 1$	$\theta_B = 0$
Fluxo/Fluxo	$Q_A = 1$	$Q_B = 0$
Fluxo/Convecção	$Q_A = 1$	$\theta_{\infty B} = 0 \quad Bi = 5$
Convecção/Temperatura	$\theta_\infty = 1 \quad Bi = 5$	$\theta_B = 0$
Convecção/Fluxo	$\theta_\infty = 1 \quad Bi = 5$	$Q_B = 0$
Convecção/Convecção	$\theta_\infty = 1 \quad Bi = 5$	$\theta_{\infty B} = 0 \quad Bi = 5$

As Figs. 4.2 a 4.4 apresentam as distribuições de temperatura obtidas para a combinação de condições de contorno onde o aquecimento se faz pela imposição de uma temperatura na superfície livre (superfície A), ou seja, condição de temperatura prescrita de valor 1. Para a superfície B considera-se temperatura prescrita de valor zero (Fig. 4.2), fluxo prescrita nulo, isto é, isolado (Fig. 4.3) e convecção com valor de  $Bi$  igual a 5 e a temperatura ambiente igual a zero (Fig. 4.4). Em cada gráfico, a linha cheia representa a solução de volumes finitos (VF), enquanto que o círculo azul representa a solução pelo método de Laplace de tempo longo (LTL) e o losango vermelho representa a solução pelo método de Laplace de tempo curto (LTC). A solução pelo método integral (HBIM) é representada pela letra x. Para cada um destes métodos, são apresentadas soluções para 10 tempos diferentes, começando pelo tempo inicial (zero), em que a temperatura é zero ao longo de toda a extensão do sólido. Esta mesma estrutura de curvas se mantém ao longo desta seção.

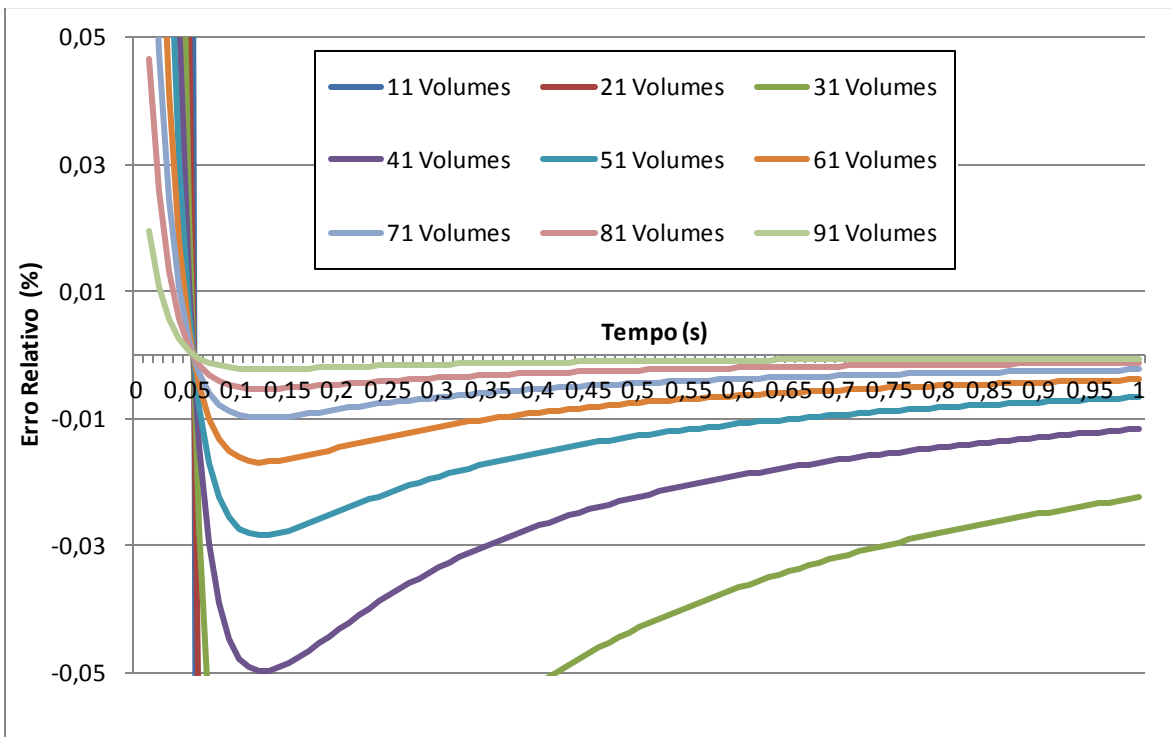


Figura 4-1 – Análise do erro relativo do refino de malha para a solução por Volumes Finitos em função do tempo (s).

Para os gráficos da Fig. 4.2, cujas temperaturas são prescritas em ambas as faces, observa-se que todas as curvas tendem a convergir em uma única, à medida que o tempo passa, mostrando que o regime permanente está sendo atingido e que todas as soluções de distribuição de temperatura tendem a uma distribuição linear, como era de se esperar. A mesma observação é válida para a Fig.4.4, que apresenta uma distribuição de temperatura que tende à distribuição linear, uma vez que na condição de convecção há a imposição de uma temperatura (temperatura ambiente). A diferença de comportamento das curvas apresentadas nos gráficos das Figs. 4.2 e 4.4 está no fato de que as temperaturas da superfície B aumentam a medida que o tempo passa para o caso de convecção (Fig. 4.4). Este mesmo comportamento é observado em outros casos analisados adiante e esta observação não será necessariamente repetida quando este fenômeno estiver presente.

Emprega-se, para a determinação do parâmetro  $n$  na solução teórica pelo método HBIM da Fig. 4.2, a Eq. 3.175, obtida para sólido semi-infinito com temperatura prescrita na superfície A. O fato deste parâmetro, que fornece a geometria da distribuição de temperatura no sólido, ser baseado na superfície A, justifica a diferença de temperatura na fronteira direita ( $x=1$ ) na Fig. 4.3, que representa a condição de fluxo prescrito na superfície B. Na verdade, o índice  $n$  do expoente, determinado para a condição de temperatura prescrita, é, no modelo, considerado constante ao longo do tempo, mesmo que a condição da superfície B seja de fluxo prescrito. O ideal seria que o coeficiente  $n$  fosse variável ao longo do tempo. O estudo e desenvolvimento de modelos que considerem a variação do parâmetro  $n$  ao longo do tempo é uma das propostas de continuação do presente trabalho.

Em termos gerais, nestas figuras (Figs. 4.2 a 4.4), os quatro resultados comparam bem entre si para toda a extensão do sólido, embora possam ser observados claramente dois fenômenos. O primeiro é o fenômeno de Gibbs, relatado na revisão bibliográfica do método de separação de variáveis e visualizado a partir da oscilação da solução LTL próxima a fronteira esquerda ( $x=0$ ); o segundo é uma não concordância entre a solução VF e todas as demais soluções nos instantes iniciais, comportamento esse que pode ser creditado ao refino da malha temporal, uma vez que esta não concordância diminui com o avanço do tempo, até não ser mais detectável.

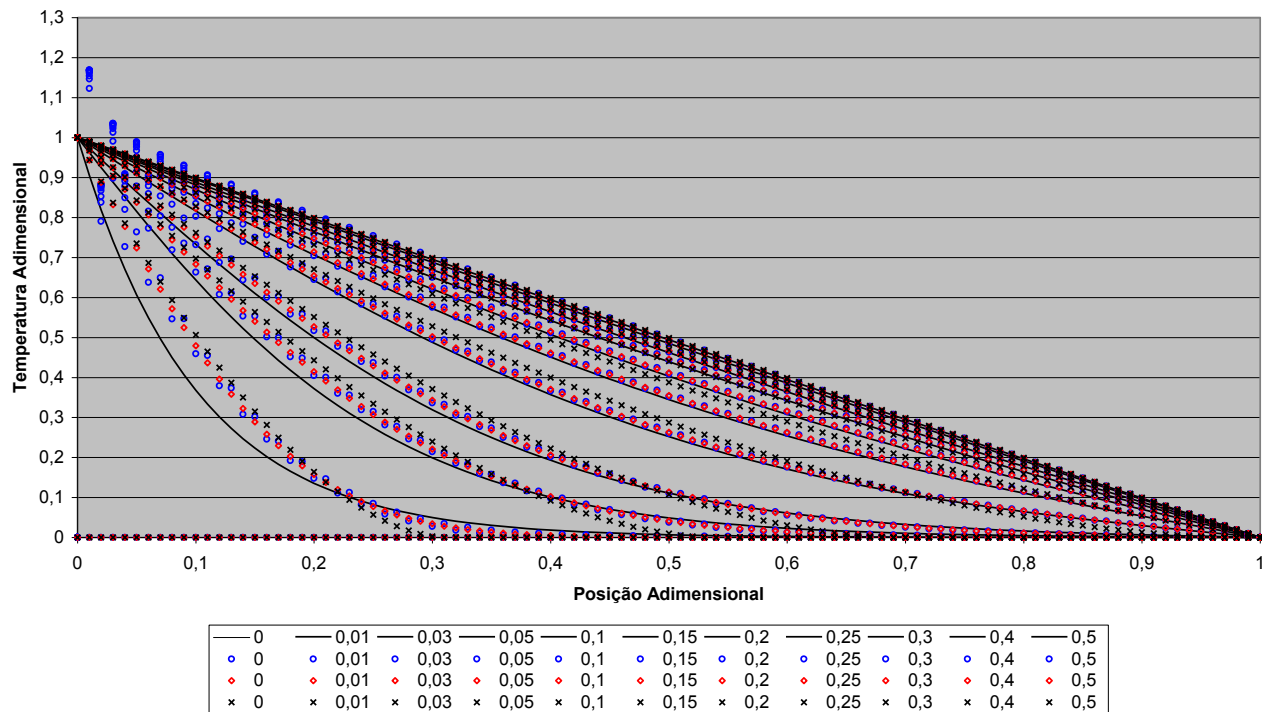


Figura 4-2 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,5 ) pelos diversos métodos ( — VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de temperatura prescrita à esquerda e temperatura prescrita à direita.



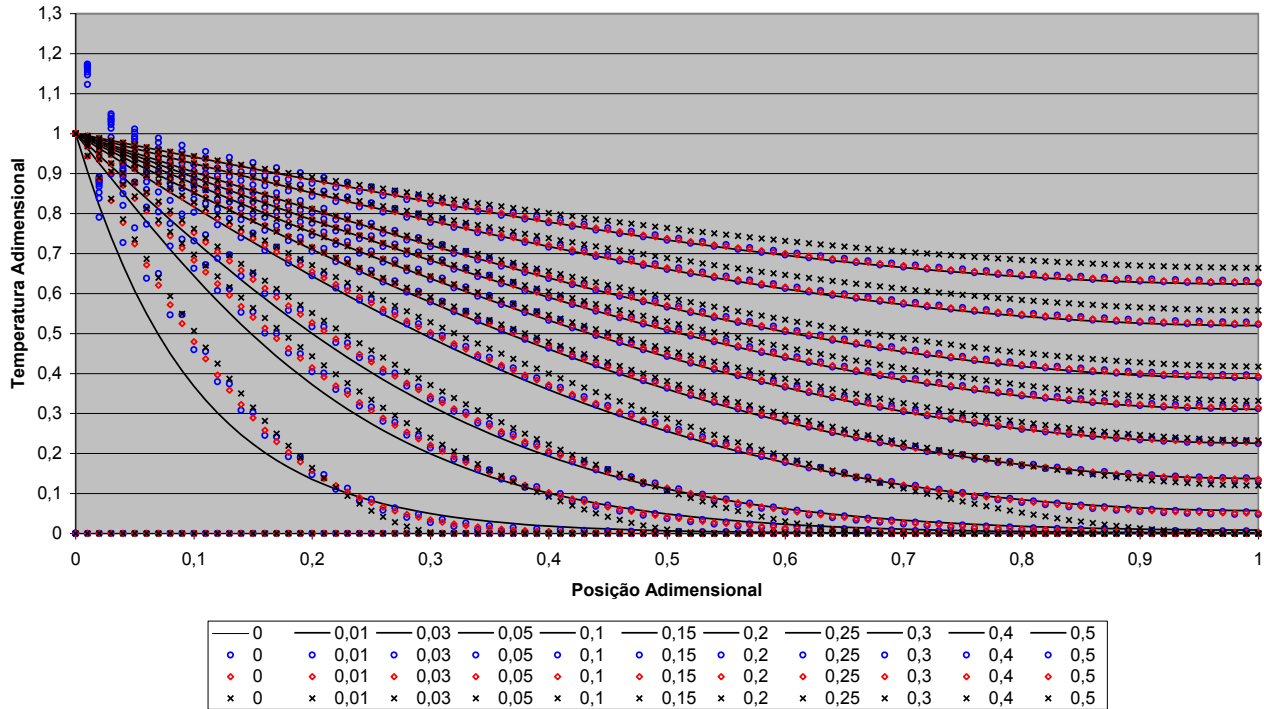


Figura 4-3 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,5 ) pelos diversos métodos ( — VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de temperatura prescrita à esquerda e fluxo prescrito à direita.

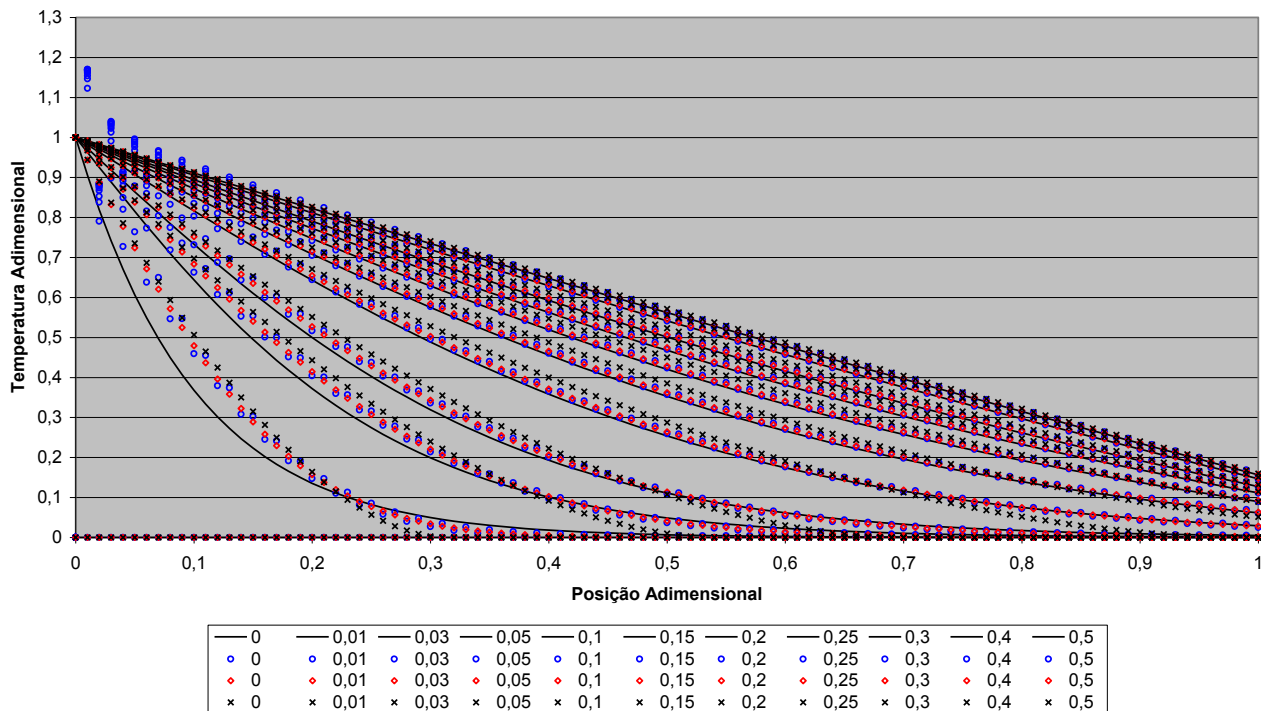


Figura 4-4 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,5 ) pelos diversos métodos ( – VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM ) para as condições de temperatura prescrita à esquerda e convecção à direita.

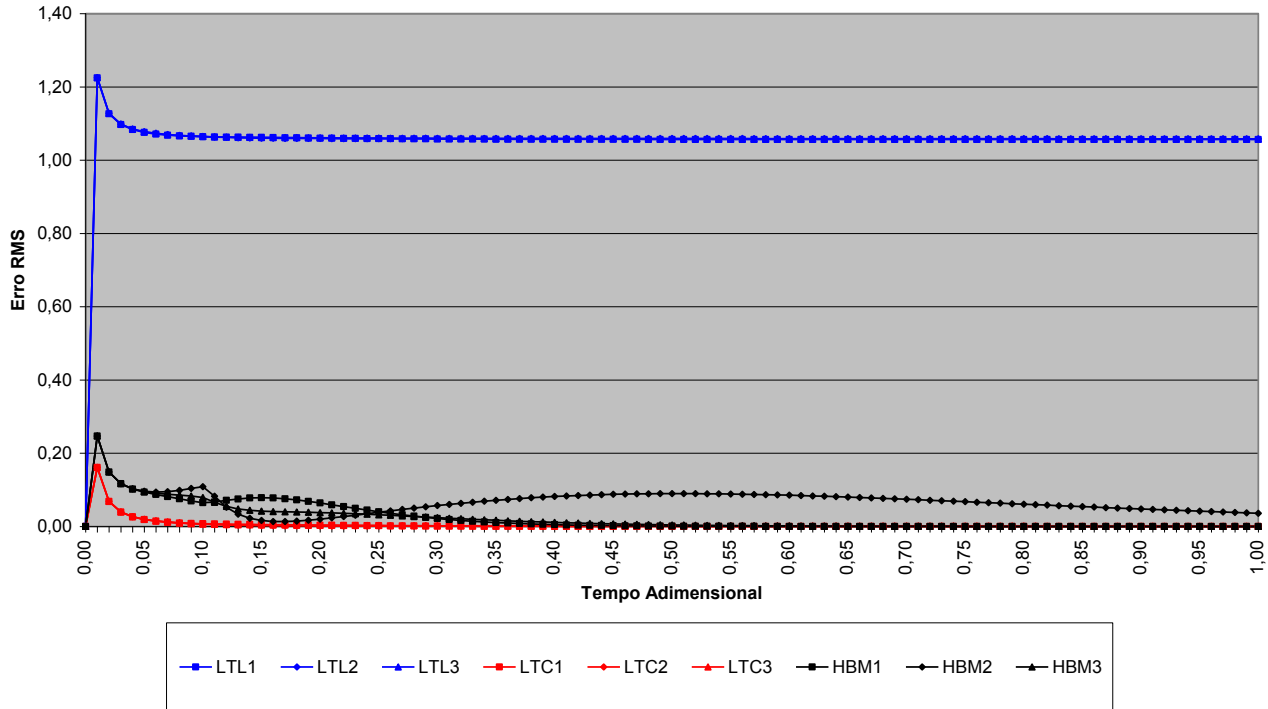


Figura 4-5 – Análise do erro RMS das soluções (LTL, LTC e HBM) em comparação a de VF para as condições de temperatura prescrita à esquerda e (1 - temperatura prescrita, 2 - fluxo prescrita e 3 - convecção) à direita.

Para quantificar as observações das diferenças observadas nos parágrafos anteriores, a Fig. 4.5 apresenta o gráfico do erro RMS das quatro soluções analíticas desenvolvidas em relação à solução VF em função do tempo adimensional. Nesse gráfico observa-se o alto valor da diferença referente às soluções obtidas pelo LTL e VF, erro claramente ligado ao fenômeno de Gibbs já detectado anteriormente. Observa-se que o comportamento do gráfico das diferenças em relação ao espaço, para os três casos LTL é exatamente o mesmo. O mesmo pode ser dito em relação aos gráficos relativos aos LTC. O aumento inicial e o seguinte decréscimo do erro nas soluções do LTC e HBIM são decorrentes da diferença da distribuição de temperatura do método de VF devido ao refino da malha temporal, também já detectado e comentado anteriormente. Já as curvas relativas ao método HBIM apresentam comportamento diverso para os três casos analisados. Na realidade, este comportamento é devido ao fato de que o mesmo perfil de temperaturas foi adotado, independentemente das condições de contorno da superfície B. Como se sabe que as distribuições são altamente dependentes de suas condições de contorno, é de se esperar que as diferenças sejam variáveis de acordo com os casos estudados. Importante observar que todos os erros, com exceção dos erros do LTL, ficaram abaixo do valor de 0,2.

O conjunto de casos em que o aquecimento se faz por fluxo prescrito é apresentado nas Figs. D-5, D-6 e D-7 do apêndice, para temperatura prescrita (zero), fluxo prescrito (nulo) e convecção ( $Bi=5$  e temperatura ambiente zero) na superfície B, respectivamente. Neste caso a temperatura aumenta continuamente na superfície A como era de se esperar, uma vez que calor está continuamente sendo fornecido ao sólido. Novamente observa-se um comportamento quase linear à medida que o tempo avança para os casos de temperatura prescrita e convecção na superfície B, embora a inclinação das curvas aumente continuamente.

Da mesma forma que ocorre com as Figs. 4.2, 4.3 e 4.4, observa-se uma não-concordância da solução por VF com as demais soluções nos instantes iniciais, embora de forma não tão clara quanto no caso anterior.

Para estes três casos analisados, observa-se que as soluções pelo HBIM apresentam discrepâncias crescentes de temperaturas quando comparadas com os demais modelos analíticos e VF (que, por sinal, apresentam resultados muito semelhantes entre si). Esta diferença é maior e aumenta com o passar do tempo, principalmente junto à fronteira esquerda ( $x=0$ ). Esse comportamento é mais pronunciado para o caso de fluxo prescrito em ambas as faces, apresentado na Fig. D-6. O valor do parâmetro  $n$  empregado nesta solução é dado pela Eq. 3.181, obtido para o caso de fluxo constante na superfície A para um sólido semi-infinito. Como há

fluxo prescrito na superfície B, existe uma constante elevação do nível de temperatura do sólido, que não tende a um patamar fixo. Desta forma, a medida que o tempo passa, mais a fronteira B influencia a distribuição de temperatura, cujo perfil proposto no método HBIM é baseado apenas na superfície A. Observa-se que, com a passagem do tempo, as distribuições de temperatura tendem a ser constantes, porém localizadas em patamares crescentes, fato este observado pela presença de curvas paralelas.

É importante notar que, embora não seja visualmente detectável, a oscilação referente ao fenômeno de Gibbs da solução LTL ainda existe. Entretanto, nesse conjunto de soluções, a oscilação ocorre na derivada da função temperatura, isto é, no fluxo de calor. Desta forma o fenômeno aparece de forma atenuada no gráfico das temperaturas. Logo seria esperada uma derivada correspondente ao fluxo prescrito. Porém um refino da malha na região próxima a superfície à esquerda mostra um comportamento de fluxo zero, ou seja, uma condição de isolamento nesta referida superfície.

No gráfico da diferença entre os resultados analíticos e VF, dado pelo erro RMS e apresentado na Fig. D-8, pode ser observado que, tanto os casos LTL como os LTC, apresentam erros nulos ao longo do tempo. Já as soluções apresentadas pelo método HBIM apresentam erros que variam ao longo do tempo, sendo praticamente nulos para tempos pequenos, aumentando rapidamente a partir de um determinado instante. Na realidade, este instante marca o final da solução de sólido semi-infinito, quando o fluxo na superfície B ainda não influenciou a distribuição de temperaturas, e o início da solução de sólido finito. Isto reforça a observação anterior sobre a necessidade de um ajuste mais preciso do parâmetro  $n$ , que certamente contribuiria para uma melhor precisão do HBIM. Contudo, com exceção da situação de fluxo prescrito em ambas as superfícies, todas as demais soluções mantiveram os erros RMS abaixo de 0,1.

O último conjunto de soluções tratadas referente ao Caso 1, para a situação de condições de contorno constantes, é o que diz respeito ao aquecimento por convecção na superfície A. As soluções são apresentadas nos gráficos das Figs. D-9, D-10 e D-11. Novamente observam-se soluções que tendem à distribuições lineares de temperatura, a medida que o tempo passa, para os casos nos quais a temperatura seja prescrita diretamente ou indiretamente (caso da convecção de calor). Observa-se também a não-concordância da solução de VF para instantes iniciais. Observam-se, ainda, as grandes diferenças tanto no comportamento das curvas, quanto nas diferenças de temperaturas observadas na superfície à direita ( $x=1$ ), para as soluções que empregam o HBIM, casos de fluxo de calor prescrito na superfície B. Estas diferenças se justificam devido a questão da escolha do

parâmetro  $n$ , que neste caso é dado pela Eq. 3.184, para o sólido semi-infinito, sujeito a convecção na superfície livre à esquerda.

As características observadas nas Fig. D-9 a D-11 são mais visíveis estudando-se os gráficos do erro RMS, apresentado na Fig. D-12. Estes erros são praticamente nulos para o caso LTL e muito pequenos para LTC, principalmente para pequenas distâncias em relação à origem do sólido ( $x=0$ ). Já para o HBIM, pode-se notar pequenas diferenças entre VF e métodos analíticos, nos instantes de tempo iniciais, devido às discrepâncias entre a solução de VF e as demais soluções. Esse erro diminui até atingir um valor mínimo no instante próximo ao instante em que começa a solução de sólido finito. A partir de então, apenas o erro RMS das soluções ligadas ao HBIM aumentam e, com exceção da solução que envolve a condição de fluxo prescrito, ficam abaixo do valor de 0,1. Além disto, todas diminuem à medida que a solução tende ao regime permanente.

A oscilação de Gibbs não foi detectada por não haver um valor fixo de temperatura e/ou fluxo na superfície de aquecimento para comparação, mas acredita-se que a mesma esteja presente na solução.

Para encerrar a análise das soluções encontradas para condições de contorno constantes no tempo, apresenta-se a Tabela 4-2 com os tempos de processamento em segundos que foram necessários em cada uma das soluções.

Verifica-se, como esperado, que o método VF não foi sensível a variação das condições de contorno. Os métodos de Laplace (LTL e LTC) apresentaram um maior consumo de recursos computacionais para as situações envolvendo convecção, o que pode ser explicado pelos somatórios adicionais existentes nas soluções com convecção, em comparação com as sem convecção. Considerando as ordens de grandeza dos valores desta tabela, pode-se afirmar que o tempo de processamento para o método VF é da ordem de 100, enquanto que as soluções de Laplace são da ordem de 10 e as de HBIM são da ordem de um.

Importante registrar que: os casos analisados foram implementados com o software de manipulação algébrica Maple 13 – apresentado no Apêndice, todos os casos foram rodados no mesmo computador, os tempos dependem de certa forma do software utilizado e a intenção dessa comparação é obter resultados qualitativos e não valores absolutos. Além disto, é importante ressaltar que a contagem do tempo da solução obtida por LTL desconsiderou o tempo de cálculo dos autovalores.

Tabela 4-2 – Tempo de processamento utilizado na situação  $m=0$  (s)

	$x=0$	$x=1$	VF	LTL	LTC	HBIM
1	Temperatura	Temperatura	221,44	29,98	10,48	3,89
2	Temperatura	Fluxo	221,98	32,78	10,91	3,58
3	Temperatura	Convecção	223,22	62,33	33,70	3,97
4	Fluxo	Temperatura	223,41	33,78	26,08	4,27
5	Fluxo	Fluxo	225,17	33,17	26,70	3,95
6	Fluxo	Convecção	225,95	65,09	71,52	4,23
7	Convecção	Temperatura	226,42	36,77	57,22	5,58
8	Convecção	Fluxo	227,63	37,52	58,14	5,47
9	Convecção	Convecção	228,69	359,77	127,61	5,55

#### 4.3 CASO 2 – CONDIÇÕES COM DEPENDÊNCIA LINEAR AO TEMPO

Para o caso da condição de contorno apresentar dependência linear ao tempo, considera-se o coeficiente  $m$  da função de aquecimento, dada por  $f_0 \tau^m$ , igual a um. Os valores das demais variáveis envolvidas serão as mesmas do Teste 1 apresentadas na Tab. 4-1.

Os gráficos apresentados nas Figs. 4.6, 4.7 e 4.8 são as distribuições espaciais da temperatura para as condições de contorno que apresentam a combinação de temperatura prescrita na superfície A e: temperatura prescrita zero, fluxo prescrito nulo e convecção com  $Bi$  igual a 5 e temperatura ambiente zero, respectivamente, na superfície B. Em todas as situações é possível uma boa concordância entre as soluções, com exceção das soluções obtidas pelo método do HBIM em que há uma boa concordância na fronteira a esquerda ( $x=0$ ), que diminui a medida que a solução se aproxima da fronteira a direita ( $x=1$ ). Isso ocorre devido a uma possível mudança de perfil de temperatura entre a condição de sólido semi-infinito e sólido finito, que o modelo não prevê, uma vez que emprega parâmetros  $n$  fixos e relativos a sólidos semi-infinitos. Esse ponto é mais crítico na condição de temperatura prescrita a esquerda e fluxo prescrito a direita, mostrado na Fig. 4.7 e menos crucial para a condição de temperatura prescrita em ambas as superfícies, apresentada na Fig. 4.6. Nestes casos, as distribuições de temperaturas não tendem à forma linear com a passagem do tempo e nem a um patamar fixo, uma vez que a temperatura da superfície livre em  $x=0$  sobe lineamente. Para os casos apresentados nas Fig. 4.6, a temperatura da superfície em B é fixa em zero, enquanto que, para o caso da Fig. 4.8, aumenta ligeiramente, já que a temperatura ambiente e o coeficiente de troca térmica ( $Bi$ ) são considerados

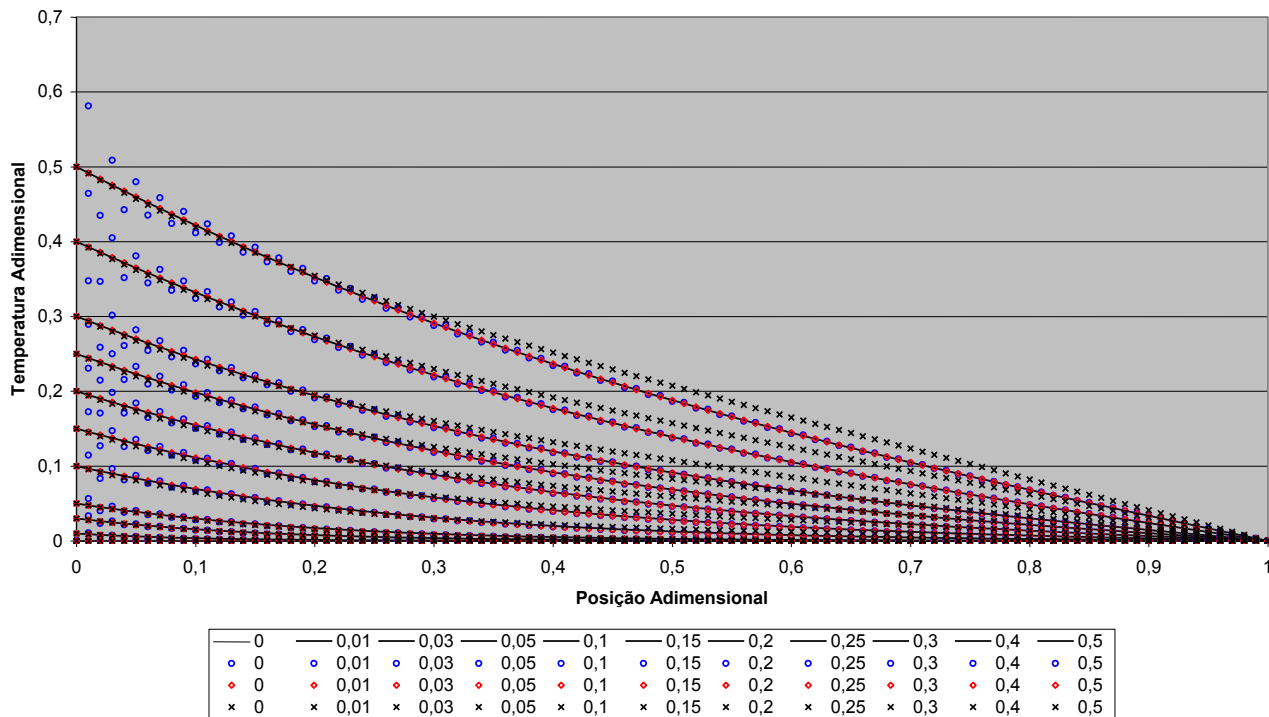


Figura 4-6 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,5 ) pelos diversos métodos ( – VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de temperatura prescrita com variação linear à esquerda e temperatura prescrita à direita.



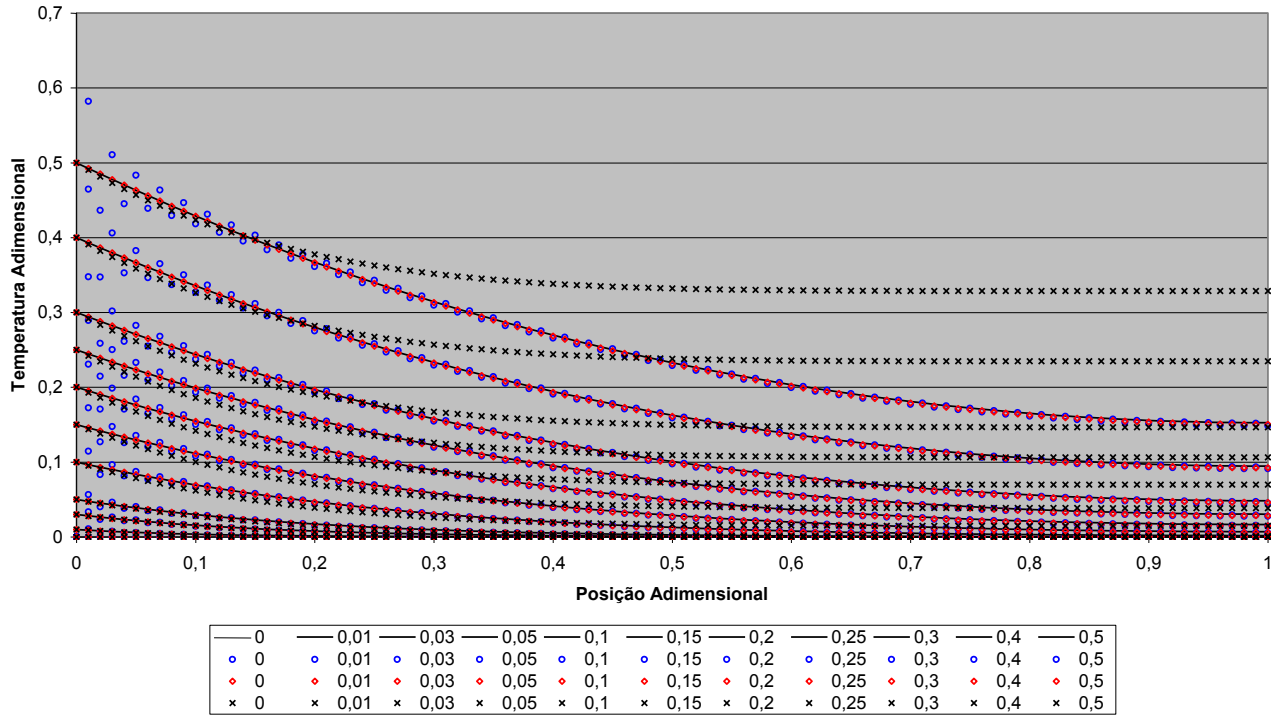


Figura 4-7 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,5 ) pelos diversos métodos ( – VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de temperatura prescrita com variação linear à esquerda e fluxo prescrito à direita.

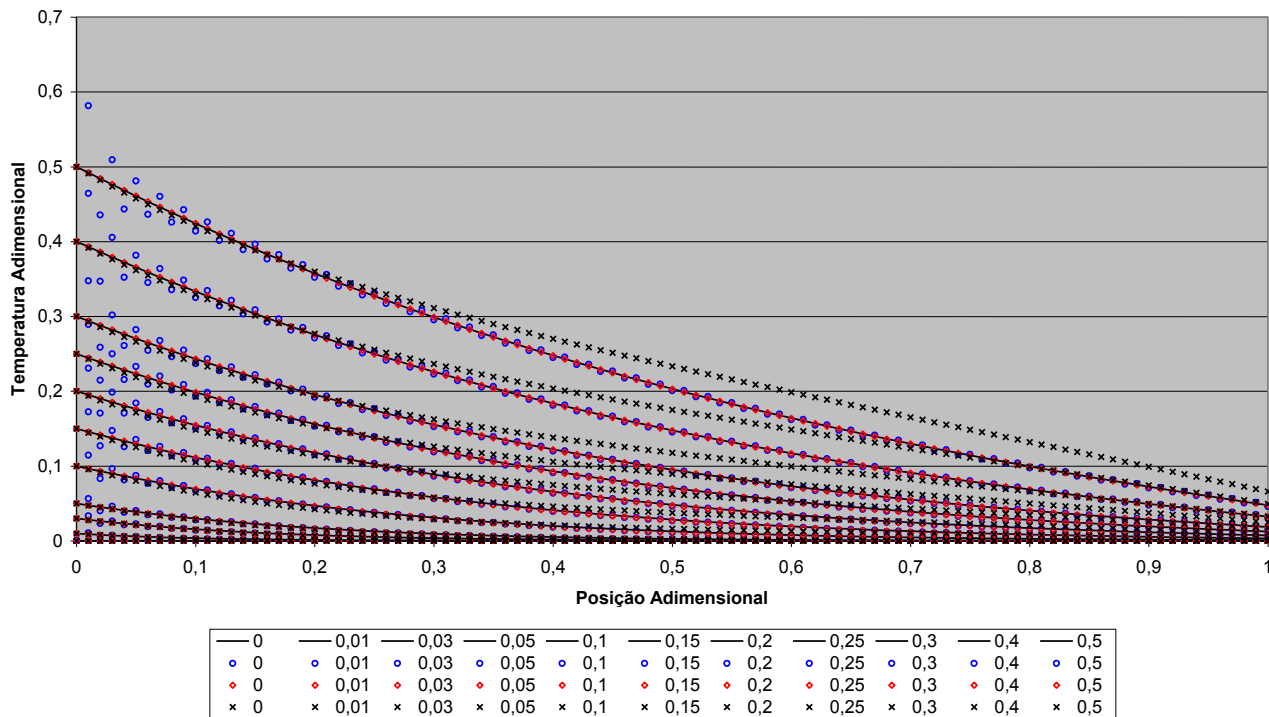


Figura 4-8 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de temperatura prescrita com variação linear à esquerda e convecção à direita.

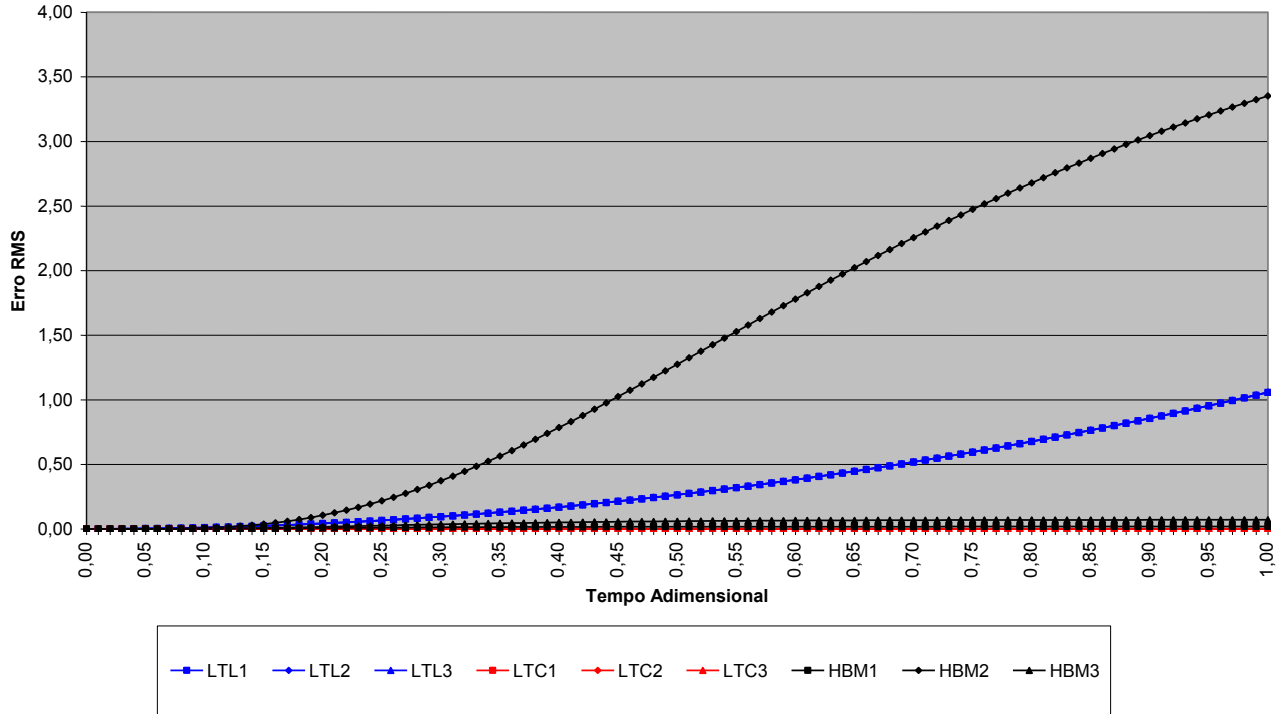


Figura 4-9 – Análise do erro RMS das soluções (LTL, LTC e HBM) em comparação a de VF para as condições de temperatura prescrita com variação linear à esquerda e (1 - temperatura prescrita, 2 - fluxo prescrita e 3 - convecção) à direita.

constantes. Já as temperaturas para o caso representado pela Fig. 4.7, que apresenta fluxo na superfície B, os níveis de temperaturas das curvas permanecem aumentando, sendo que as curvas não tendem a uma distribuição uniforme, já que a temperatura na superfície A continua se elevando.

O gráfico do erro RMS, apresentado na Fig. 4.9, sintetiza essa análise. É importante notar que, embora haja uma discrepância visual no perfil de temperaturas, esta não se manifesta tão claramente no erro RMS. É muito mais visível o erro RMS nas soluções LTL causado pelo fenômeno de Gibbs explicado no Teste 1, do que as discrepâncias no caso de temperatura prescrita ou convecção na fronteira à esquerda.

Praticamente as mesmas observações para o caso temperatura constante prescrita na superfície A, surgem para o caso fluxo prescrito como fator de aquecimento do sólido em  $x=0$ , apresentado no apêndice Figs. D.17, D.18 e D.19. As comparações entre os métodos analíticos tradicionais e VF são sempre muito boas e neste caso não se observa a discrepância de Gibbs pelos mesmos aspectos já relacionados na parte do Teste 1, quando da análise da situação de fluxo prescrito na superfície A.

As soluções que envolvem o HBIM apresentam discrepâncias, que aumentam consideravelmente nas regiões próximas às superfícies cujas condições de contorno sejam de fluxo prescrito. Novamente a questão da escolha do parâmetro  $n$  determina a concordância entre a solução e a distribuição real de temperaturas. Assim as condições de fluxo prescrito em ambas as superfícies apresentam resultados bastante ruins, quando comparados às outras soluções, conforme se verifica analisando a Fig. D.20, referente ao erro RMS entre todas as soluções analíticas e a solução por VF. Estes erros aumentam bastante para tempos maiores do que o tempo de início do período de sólido finito, conforme já discutido na seção anterior.

O último caso a ser analisado nesta seção é a condição de variação linear da convecção na superfície A. Os perfis de temperatura observados para os casos onde as superfícies B estão sujeitas a temperatura prescrita (Fig. D.21), fluxo de calor prescrito (Fig. D.22) e convecção (Fig. D.23) são bastante diferentes entre si. Como a condição na superfície A apresenta indiretamente a prescrição de uma temperatura, as discrepâncias entre resultados obtidos pelo método HBIM e VF são bem menores do que as observadas para o caso de fluxo prescrito (seção anterior). Coerentemente com o que vem sendo observado até o presente momento, as maiores diferenças são observadas para o caso de fluxo prescrito na superfície B. A Fig. D.24 apresenta um gráfico das diferenças entre os resultados obtidos pelos diversos métodos e os de VF, mostrando em termos numéricos, estas observações.

Para encerrar a análise das soluções encontradas para condições de contorno com dependência linear no tempo, apresenta-se a Tab. 4-3 com os tempos de processamento em segundos que foram necessários em cada uma das soluções.

Observa-se nesta tabela que, da mesma forma como no caso da condição de contorno constante no tempo, aqui também o tempo de cálculo do método VF não foi sensível à variação da condição de contorno. Os métodos de Laplace (LTL e LTC) apresentaram um maior consumo de recursos computacionais para as situações envolvendo convecção, o que pode ser explicado pelos somatórios adicionais existentes nas soluções com

Tabela 4-3 – Tempo de processamento utilizado na situação  $m=1$  (s)

	X=0	x=1	VF	LTL	LTC	HBIM
1	Temperatura	Temperatura	219,45	52,20	24,42	5,84
2	Temperatura	Fluxo	222,64	57,64	25,11	5,64
3	Temperatura	Convecção	223,97	109,20	89,44	5,92
4	Fluxo	Temperatura	223,39	59,11	26,00	7,74
5	Fluxo	Fluxo	225,22	57,06	26,27	7,30
6	Fluxo	Convecção	226,38	101,75	112,03	9,05
7	Convecção	Temperatura	227,05	69,89	123,23	27,67
8	Convecção	Fluxo	227,42	66,00	124,44	28,72
9	Convecção	Convecção	228,30	369,39	205,03	29,17

convecção. Da mesma forma que observado no caso anterior, considerando ordens de grandeza, pode-se afirmar que o tempo de processamento para o método VF é da ordem de 100, enquanto que as soluções de Laplace são da ordem de 10 e as de HBIM são da ordem de 1. As mesmas condições observadas para a obtenção de valores da Tabela 4.1 são mostradas aqui.

#### 4.4 CASO 3 – CONDIÇÕES DE PULSO NO TEMPO

Dando continuidade aos testes realizados, nessa seção, as condições de contorno da superfície A são representadas por um pulso unitário. Em termos matemáticos, a condição de pulso na fronteira é descrita como a soma de duas funções dadas por  $f_{01}\tau^{m_1}$  e  $-f_{02}(\tau - \tau_0)^{m_2}$ , sendo que a segunda função é definida como zero para valores de  $\tau$  menores que  $\tau_0$ . Assim, a solução também é expressa como a soma de duas soluções básicas: a primeira como resposta à condição  $f_{01}\tau^{m_1}$  e a segunda sendo a resposta à condição  $-f_{02}(\tau - \tau_0)^{m_2}$  transladada no tempo em  $\tau_0$  unidades. Importante observar que, do mesmo modo que a função  $-f_{02}(\tau - \tau_0)^{m_2}$  é definida como zero para valores de  $\tau$  menores que  $\tau_0$ , o mesmo ocorrerá com a segunda solução.

Para todas as análises e comparações apresentadas nessa seção consideram-se  $m_1$  e  $m_2$  iguais a zero,  $\tau_0$  igual a 0,025,  $f_{01}$  igual a  $f_{02}$  e todas as demais variáveis são definidas de acordo com a Tab. 4-1 do Teste 1, para todas as combinações de condições de contorno. O tempo total de observação dos fenômenos foi estipulado em 0,1.

As distribuições de temperatura no espaço para a condição de pulso de temperatura unitária na superfície A são apresentadas nos gráficos das Figs. 4.10, 4.11 e 4.12, respectivamente para as situações de: temperatura prescrita igual a zero, fluxo zero e convecção com  $Bi$  igual a 5 e temperatura do meio externo igual a zero, na superfície B. Nestes gráficos se observa dois conjuntos de curvas. O primeiro conjunto é composto por oito curvas e equivalem aos tempos 0 (curva coincidente com o eixo  $x$ ) e 0,001 a 0,025. Estas curvas são obtidas a partir da função  $f_{01}\tau^{m_1}$  e as temperaturas em  $x = 0$  assumem o valor 1. O segundo conjunto, composto por três curvas, são representações gráficas da soma das soluções obtidas da função  $f_{01}\tau^{m_1}$  e da obtida da função  $-f_{02}(\tau - \tau_0)^{m_2}$ , e os tempos são equivalentes a 0,03 a 0,05 sendo que a temperatura de contorno para a soma das soluções em  $x=0$ , é zero. O primeiro conjunto de curvas equivale às condições de aquecimento e, portanto de elevação de temperatura do sólido. No instante  $\tau_0 = 0,025$  há um pulso negativo que força a temperatura da superfície A para zero, então o sólido passa a se resfriar, tendo a sua distribuição de temperatura tendendo a zero com o passar do tempo.

As curvas dos três gráficos não apresentam muitas diferenças de comportamento entre si, devido ao tempo de estudo que é pequeno para que a influência das condições de contorno na superfície B torne-se mais evidente. Até o instante  $\tau_0$ , o comportamento das curvas é exatamente igual ao Caso 1 e, portanto, valem todas as considerações feitas para aquele caso.

Pode ser notado em todos os gráficos (Figs. 4.10, 4.11 e 4.12) que a solução HBIM apresenta uma maior inércia térmica à essa variação abrupta de condição de contorno. Essa inércia pode ser percebida pelo aparecimento de uma maior concavidade do perfil de temperatura obtido pelo HBIM, em relação aos perfis obtidos pelas demais soluções e pelo deslocamento do ápice da curva na direção à direita, maior do que o observado nos outros perfis.

No gráfico da Fig. 4.13, as curvas das diferenças das soluções analíticas em relação ao VF são coincidentes para os três casos analisados: temperatura, fluxo e convecção na superfície B. Observando-se a diferença RMS da solução LTL para a VF mostrada nesta figura, nota-se que o fenômeno de Gibbs existe para  $\tau < 0,025$  (como ocorre no Caso 1) e deixa de existir para  $\tau > 0,025$ . Isto ocorre porque a condição de temperatura zero na fronteira  $x = 0$  é a própria solução do problema e não mais uma

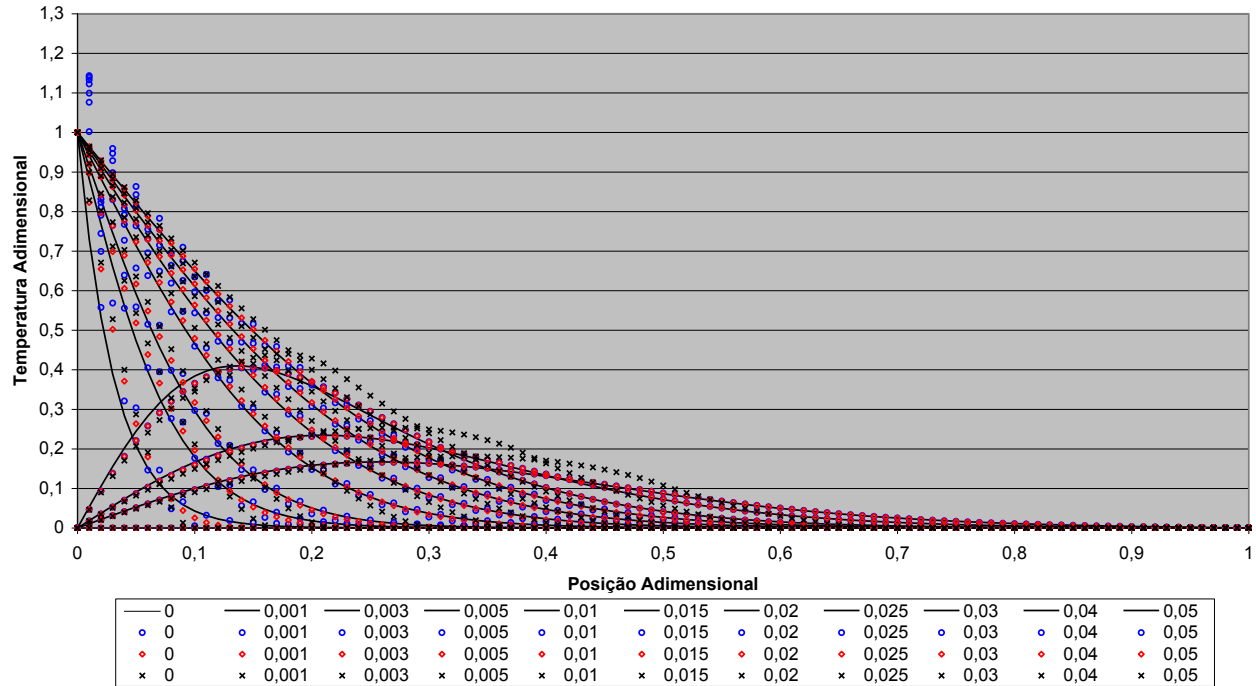


Figura 4-10 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,05 ) pelos diversos métodos ( – VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de pulso de temperatura prescrita à esquerda e temperatura prescrita à direita.

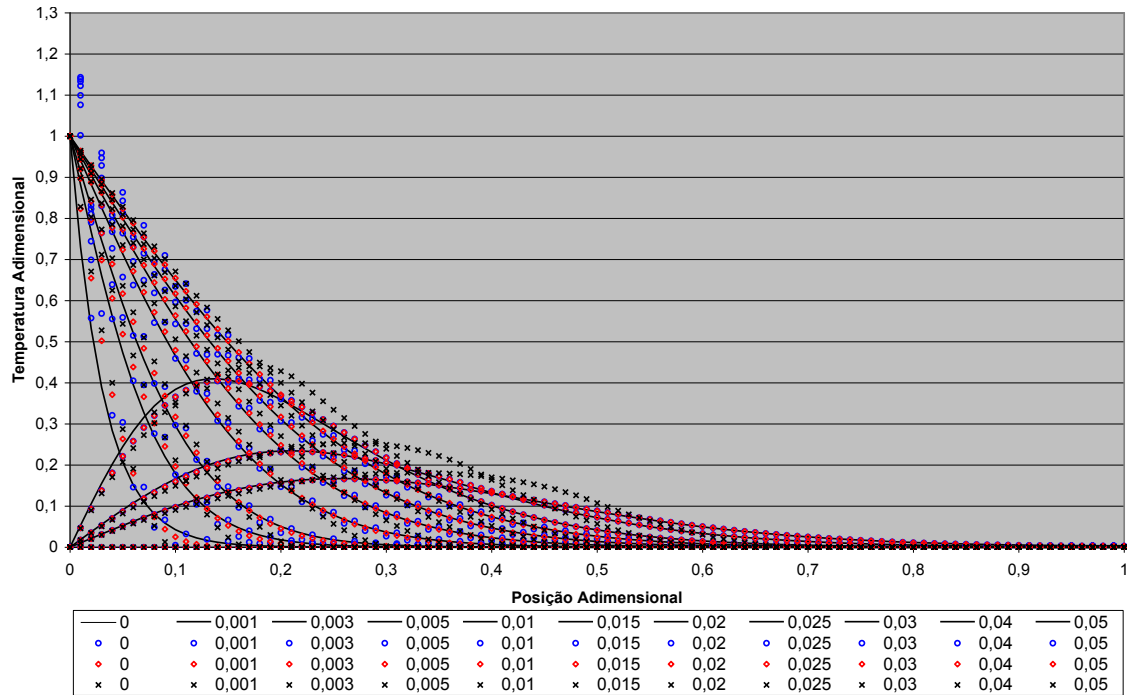


Figura 4-11 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,05 ) pelos diversos métodos ( – VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de pulso de temperatura prescrita à esquerda e fluxo prescrito à direita.



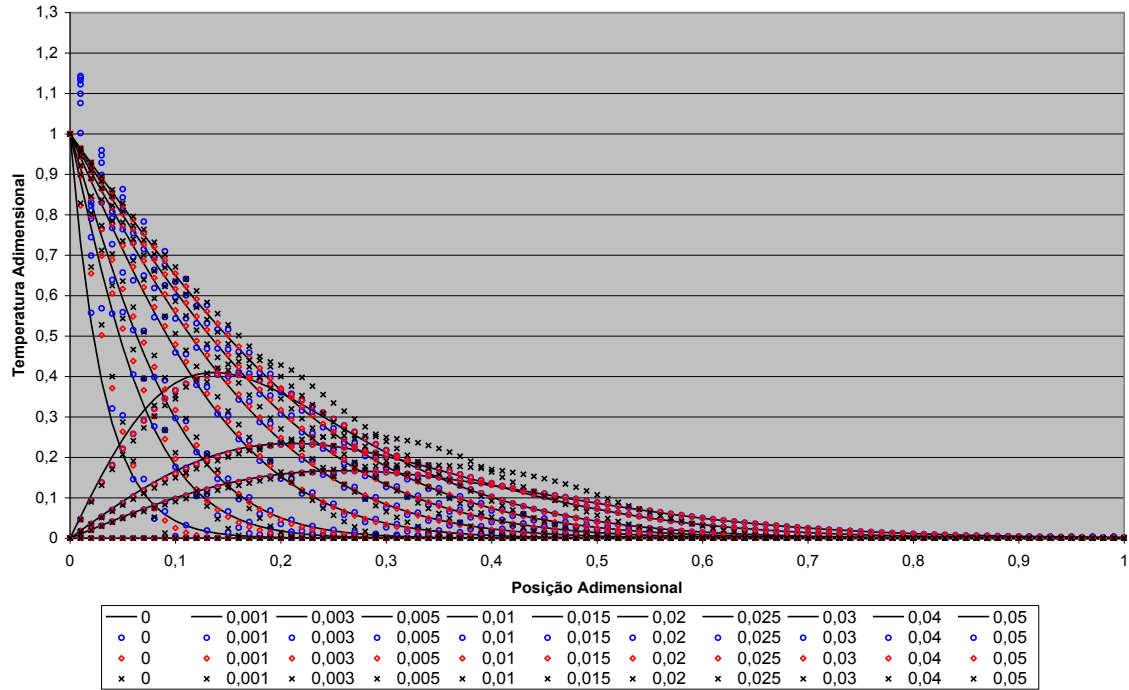


Figura 4-12 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,05 ) pelos diversos métodos ( – VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de pulso de temperatura prescrita à esquerda e convecção à direita.

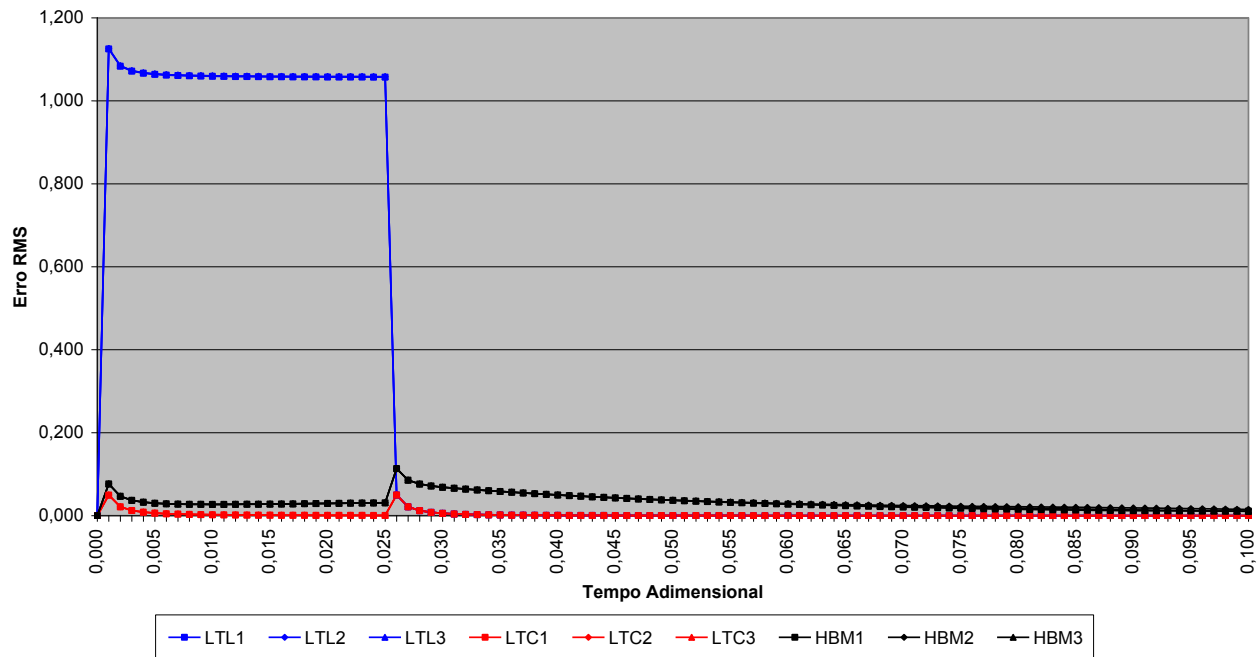


Figura 4-13 – Análise do erro RMS das soluções (LTL, LTC e HBM) em comparação a de VF para as condições de pulso de temperatura prescrita à esquerda e (1 - temperatura prescrita, 2 - fluxo prescrito e 3 - convecção) à direita.

característica da solução. Essa constatação fica mais evidente pela observação da variação abrupta da curva da solução LTL.

Note-se também que, mesmo com a aparente discrepância da distribuição de temperatura para a solução por HBIM, em todos os casos a diferença mostrada pelo erro RMS é menor que 0,2 para as situações de  $\tau$  maior que  $\tau_0$  e que esse erro tende a zero com o aumento do tempo.

As distribuições espaciais para os casos de fluxo prescrito na superfície A, e para temperatura prescrita zero, fluxo zero e convecção, caracterizada por uma temperatura ambiente zero e  $Bi$  igual a 5, na superfície B, são apresentadas, respectivamente, pelas Figs. D.29, D.30 e D.31. Novamente dois grupos de curvas podem ser observados, para  $\tau < 0,025$  e  $\tau > 0,025$ . Nestes casos, da mesma forma que observado para a situação de temperatura prescrita na superfície A, para intervalos de tempo menor que 0,05, as condições de contorno na superfície B não influenciem sensivelmente o comportamento das curvas. Porém, para tempos maiores, esta se torna muito importante, especialmente para as soluções HBIM. O gráfico da diferenças entre as soluções analíticas e VF é apresentado na Fig. D.32, e mostra claramente estas observações. Entretanto observa-se uma excelente concordância entre todos os métodos para os valores de tempo inferiores ao 0,06.

Nos casos de convecção na superfície A, apresentados nas Figs. D.33, D.34 e D.35, para as condições de contorno na superfície B: temperatura prescrita zero, fluxo zero e convecção (com  $Bi$  igual a 5 e temperatura do meio igual a zero), respectivamente, o comportamento dos perfis de temperatura se assemelha mais aos perfis obtidos na condição de fluxo prescrito do que ao de temperatura prescrita. Esta é uma característica distinta ao observado nos Casos 1 e 2, em que o perfil obtido pela condição de convecção se assemelhava mais ao encontrado na situação de temperatura prescrita. Isso ocorreu devido ao menor intervalo de observação do Caso 3 e porque a condição de convecção tem uma similaridade com a condição de fluxo prescrito para tempos curtos. Assim, nos gráficos das Figs. D.33 a D.35 poucas diferenças entre as curvas podem ser anotadas.

As curvas das diferenças RMS entre as soluções analíticas e VF podem ser observadas na Fig. D.36. Pode-se observar nesse gráfico que a solução HBIM apresenta uma diferença maior que as demais soluções para a situação de convecção na fronteira A e que essa diferença aumenta gradativamente com o avançar do tempo, da mesma forma que foi registrado no Teste 1. No instante 0,025 o aparecimento de uma nova solução eleva a diferença a um outro nível e, a partir desse instante, o erro começa a diminuir. Entretanto esse erro volta a crescer por volta do instante

0,08 quando a frente de penetração do calor atinge a superfície B. O aumento do erro depende da condição de contorno na superfície B envolvida, sendo que o maior aumento é na condição de fluxo prescrito e a de menor aumento é a de temperatura prescrita.

Encerrando esta análise das soluções encontradas para condições de contorno estilo pulso, de maneira análoga ao mostrado nos Testes 1 e 2, apresenta-se a Tab. 4-4 com os tempos de processamento em segundo, necessários em cada uma das soluções.

Tabela 4-4 – Tempo de processamento utilizado na situação pulso (s)

	X=0	x=1	VF	LTL	LTC	HBIM
1	Temperatura	Temperatura	244,53	88,34	40,42	19,67
2	Temperatura	Fluxo	291,56	108,45	43,94	18,67
3	Temperatura	Convecção	336,72	214,70	102,92	19,13
4	Fluxo	Temperatura	361,09	126,23	98,63	19,38
5	Fluxo	Fluxo	378,39	122,03	101,50	16,89
6	Fluxo	Convecção	375,98	235,44	227,06	19,39
7	Convecção	Temperatura	331,86	109,45	206,97	28,94
8	Convecção	Fluxo	388,63	148,23	213,00	31,58
9	Convecção	Convecção	403,16	1168,20	448,48	39,81

Os dados apresentados nesta tabela acompanham os apresentados para os casos: condições de contorno constantes no tempo e de variação linear. Como esperado, devido aos testes anteriores, o tempo de cálculo do método VF não sofreu variação sensível com a condição de contorno; os métodos LTL e LTC apresentaram maior consumo de recursos computacionais nos casos envolvendo convecção. Considerando ordens de grandeza, pode-se afirmar que o tempo de processamento para o método VF é da ordem de 300, enquanto que as soluções de Laplace dessa vez são da ordem de 100 e as de HBIM são da ordem de 20. As mesmas condições observadas na obtenção dos valores da Tabela 4-2 são válidas aqui.

#### 4.5 CONCLUSÕES

Neste capítulo foi feita a comparação entre as soluções analíticas desenvolvidas no Capítulo 3. Nesta comparação, a solução numérica foi considerada a solução exata (benchmark). Analisou-se o caso do sólido finito, sujeito a três diferentes tipos de condições de contorno na superfície A: independentes do tempo, variações lineares no tempo e pulsos. Tanto a superfície A quanto a B estavam sujeitas a temperatura prescrita, fluxo de calor prescrito e convecção.

Concluiu-se que todos os modelos analíticos envolvendo casos que abrangem condições de contorno de temperatura prescrita apresentaram uma grande concordância entre si e com os resultados numéricos. Há também uma boa concordância para os casos de convecção, já que nos modelos de convecção há embutida uma prescrição de temperatura do meio. Nos casos envolvendo fluxos prescritos, a concordância entre o método numérico e os analíticos clássicos continua muito boa. A comparação com o HBIM também é excelente para condições de sólido semi-infinito. Porém esta comparação com o HBIM piora para sólidos finitos, para posições próximas à superfície B, uma vez que o parâmetro n empregado no HBIM é baseado na solução de sólido semi-infinito onde apenas a condição de contorno na superfície A é levada em consideração. No caso do pulso, a comparação é melhor em todos os gráficos apresentados, uma vez que o tempo de observação das soluções foi menor, de forma que a influência das condições de contorno da superfície B é menos pronunciada.

Os tempos de processamento computacional empregando-se o HBIM são sensivelmente menores do que para a técnica de volumes finitos (em duas ordens de grandeza) e do que para os métodos analíticos clássicos (uma ordem de grandeza). Além disto, apresentam maior facilidade para implementação em códigos, uma vez que não requerem o cálculo de autovalores, e uma maior maleabilidade para lidar com condições de contorno, não usuais nos métodos clássicos, tais como funções com índices de potência não inteiros. Estes fatos fazem do HBIM um forte candidato a aplicação junto como solução de base para o desenvolvimento de métodos inversos, que normalmente exigem grande esforço computacional.



## 5 MÉTODO INVERSO

A partir da análise apresentada no Capítulo 4 e das soluções diretas desenvolvidas no Capítulo 3, o presente capítulo apresenta o desenvolvimento de um algoritmo para solução do problema inverso de condução de calor. O algoritmo foi implementado com uso do software de manipulação algébrica Maple e, a partir desta implementação, diversos casos teste foram analisados em duas etapas. Na primeira etapa, foram empregadas as soluções diretas para a obtenção de dados de distribuição de temperatura no espaço e no tempo, aos quais se aplicam os métodos inversos para a obtenção de fluxos na superfície. Na segunda etapa, visando a simulação de um caso real, adicionou-se à distribuição de temperatura obtida, um ruído de distribuição normal.

Na primeira parte deste capítulo é apresentado o algoritmo de solução empregado para o método inverso. Na segunda parte, os testes realizados.

### 5.1 DESENVOLVIMENTO DO ALGORITMO DE SOLUÇÃO INVERSA

A partir dos resultados apresentados no Capítulo 4, onde soluções diretas são analisadas e comparadas, verifica-se que o HBIM tem como grande vantagem, em relação aos demais métodos analíticos, o menor tempo computacional empregado na obtenção das soluções. Além disto, não há a necessidade do cálculo de autovalores ou do emprego de um somatório com muitos termos para obtenção de resultados confiáveis, como ocorre em alguns casos. Estas características fazem do HBIM bastante adequado para ser empregado em métodos inversos.

No presente trabalho, consideram-se as variáveis referentes às condições de contorno do problema como sendo parâmetros a serem determinados pelo uso das técnicas de métodos inversos.

Define-se  $M(P_1, P_2, \dots, P_r, \dots, P_{r_{max}})$  a solução analítica direta, que depende dos parâmetros  $P_r$ , onde  $r$  é o número do parâmetro e  $r_{max}$  o número máximo de parâmetros considerados no modelo. Essa função  $M$  é comparada com um conjunto de dados  $Y$ , obtido por meios experimentais ou gerados numericamente. Através do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), procura-se encontrar os valores dos parâmetros  $P_r$  que melhor aproximem  $M$  ao conjunto de dados  $Y$ .

Para a situação de condução de calor, tanto os modelos quanto os dados de entrada dependem do tempo e do espaço em que estão sendo comparados. Assim, pode-se considerar  $M$  como sendo a matriz composta

pelos elementos  $M_{wm}$ , que são as temperaturas calculadas pelo modelo  $M$  no instante  $t_w$  e na posição  $x_m$ . De maneira análoga, define-se  $Y$  como a matriz composta por elementos  $Y_{wm}$ , que são as temperaturas de referência obtidas no instante  $t_w$  e na posição  $x_m$ .

Conforme o MMQ, uma função objetivo,  $Q$ , é definida como a soma do quadrado das diferenças de  $M$  e  $Y$  termo-a-termo, dividida pelo quadrado do desvio padrão dos dados de referência. Matematicamente ela pode ser expressa na forma:

$$Q = \sum_{m=1}^{nm} \sum_{w=1}^{nw} \frac{(Y_{wm} - M_{wm}(P_r))^2}{\sigma_{wm}^2} \quad (5.1)$$

onde  $nm$  é o número máximo de posições e  $nw$  o número máximo de instantes de tempo empregados na análise. O somatório duplo e os dois contadores podem ser agrupados em um único por comodidade, sendo a expressão reescrita na forma

$$Q = \sum_{q=1}^{q_{max}} \frac{(Y_q - M_q(P_r))^2}{\sigma_q^2} \quad (5.2)$$

onde  $q_{max}$  é o número máximo de pontos que serão analisados no método, calculado pela expressão  $nm \times nw$ .

De acordo com o MMQ, os valores dos parâmetros  $P$  que minimizam  $Q$  são os mesmos que fazem com que a primeira derivada de  $Q$  em função de  $P_r$  seja zero ou o mais próximo disso. Assim, a partir das derivadas em relação a cada um dos parâmetros, é possível escrever um sistema de  $r_{max}$  equações, com o mesmo número de incógnitas, formando uma matriz. Assim, este sistema pode ser resolvido na forma matricial pela da técnica do Gradiente Conjugado (GC).

O método de solução utilizado foi o Gradiente Conjugado Não-Linear Pré-Condicionado com Newton-Raphson e Polak-Ribière. Este método foi implementado no presente trabalho conforme o algoritmo e orientações apresentadas por Schewchuck (1994). Essa abordagem foi escolhida porque permite o uso de matrizes no processo iterativo e exclui a necessidade de cálculo da matriz de sensibilidade a cada passo iterativo, agilizando, conseqüentemente, o cálculo.

Detalhes do algoritmo implementado, envolvendo fluxograma, critérios de parada, são encontrados no Apêndice C.

O algoritmo foi implementado para a solução de fluxo de calor para sólido semi-infinito por HBIM. O caso de fluxo de calor na superfície foi



escolhido considerando-se a possível aplicação do presente trabalho para a obtenção de dados de fluxo de calor em uma superfície de difícil acesso.

Em geral, nas aplicações de engenharia, deseja-se que o calor produzido externamente ao sólido de interesse não atinja a parte interna do mesmo. Assim, materiais de baixa condutividade térmica, tais como o Teflon, isopor e refratários, acabam sendo utilizados como isolantes, de forma que o calor não alcance a estrutura do sólido. Esse isolante colabora para a hipótese de sólido semi-infinito bastante realista.

No caso em que diversos fluxos térmicos, de diferentes origens, intensidades e que não podem ser discriminados, atinjam o sólido de interesse, considera-se um fluxo total de calor incidindo sobre o material, não importando a sua origem.

O algoritmo da solução inversa foi implementado empregando-se o software Maple, na seguinte ordem. Inicialmente o modelo analítico direto em sua forma adimensional foi implementado. O valor de  $n$  do perfil de temperatura adotado é calculado em função do grau  $m$  da condição de contorno (Eq. 3.181), utilizando-se a Eq. 3.178.

Caso o aquecimento da superfície livre possa ser representado por uma função monotônica, isto é, sem inflexão ou descontinuidades, a variável fluxo de calor na superfície  $A$ ,  $Q_A$  é o parâmetro  $P_1$  a ser determinado e a variável  $m$  é o parâmetro  $P_2$ .

Para aquecimentos superficiais, representado por funções que apresentam descontinuidades (tipo pulso) ou inflexões, considera-se como modelo a soma de duas soluções analíticas, ambas dadas pela Eq. 3.178, as quais são defasadas entre si no tempo pelo parâmetro  $P_5$ . Nesta situação, o primeiro termo da solução tem suas variáveis  $Q_A$  e  $m$  representadas pelos parâmetros  $P_1$  e  $P_3$ , respectivamente, enquanto que as variáveis  $Q_A$  e  $m$  do segundo termo são representadas por  $P_2$  e  $P_4$ .

Quando as propriedades térmicas do material analisado são desconhecidas, incorpora-se, ao programa desenvolvido, o parâmetro  $P_6$  que, fisicamente, é a razão entre a difusividade térmica do material e o quadrado da distância característica do problema, definida a partir dos parâmetros adimensionais do problema analisado já descritos na seção 2.3.2.

Tendo sido os modelos analíticos implementados, calculam-se a primeira e a segunda derivadas da solução em relação a cada um dos seis parâmetros implementados. Essa derivação é algébrica, sendo esse processo realizado apenas uma vez em todo o algoritmo, o que agiliza ainda mais os procedimentos. Em seguida atribuem-se os valores iniciais aos parâmetros e obtêm-se os valores numéricos das derivadas para verificação das condições de estabilidade, isto é, a diagonal da matriz da segunda derivada

da solução deve ser positiva. Caso isso não ocorra novos valores iniciais devem ser escolhidos.

Uma vez que esses valores satisfaçam as condições de estabilidade, inicia-se o método do gradiente conjugado conforme descrito no Apêndice 3. Após a convergência do método, faz-se uma análise qualitativa das distribuições de temperaturas obtidas pelo modelo a partir dos parâmetros calculados pelo algoritmo, comparando-as com as temperaturas fornecidas como dados de entrada. Com esta comparação é possível observar o histórico de evolução dos parâmetros em função das iterações e calcular os limites de confiabilidade dos parâmetros, determinados pelo programa através do cálculo da matriz de covariância.

A seguir são analisados os testes realizados com o algoritmo implementado.

## 5.2 TESTES DO ALGORITMO IMPLEMENTADO

Para o primeiro teste foi escolhida a situação de um fluxo de calor monotônico, isto é, sem inflexões. Foi utilizado o método HBIM para gerar o histórico de temperatura em três posições adimensionais diferentes ( $x = 0.1$ ,  $x = 0.2$  e  $x = 0.3$ ), para os valores  $Q_A = 10$  e  $m = 1.3$ . A Fig. 5-1 apresenta o histórico de temperaturas geradas, no eixo das ordenadas têm-se o tempo adimensional e nas abscissas a temperatura adimensional.

Para utilização como dados de entrada do programa consideram-se as temperaturas em  $x = 0.1$ ,  $x = 0.2$ , a temperatura em  $x = 0.3$  será utilizada para verificação dos resultados obtidos pelo método inverso. Nesse teste, devido a monotonicidade do fluxo, apenas dois parâmetros são considerados:  $P_1$  e  $P_2$ , representando  $Q_A$  e  $m$  respectivamente. Atribuiu-se, neste teste, os valores  $P_1 = 8$  e  $P_2 = 1$  como valores iniciais do problema. A Fig. 5-2 apresenta, em vermelho, as curvas apresentadas em vermelho e azul da Fig. 5-1, que são utilizados com dados de entrada do método inverso e, em preto, as curvas obtidas com uso do modelo direto para os valores iniciais dos parâmetros ( $P_1 = 8$  e  $P_2 = 1$ ). Por esta figura pode-se observar a grande discrepância entre as duas distribuições.

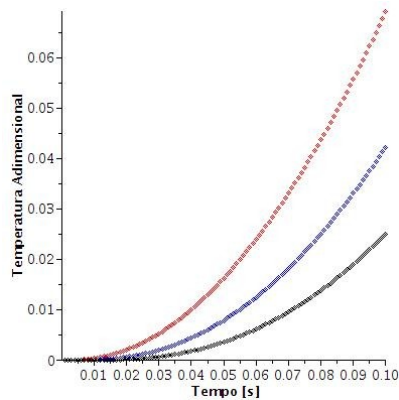


Figura 5-1 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo  $10\tau^{1.3}$  para as posições ( $x = 0.1$  – vermelho,  $x = 0.2$  – azul e  $x = 0.3$  – preto).

A Fig. 5-3, que relaciona no eixo vertical os parâmetros  $P_1$  (curva vermelha) e  $P_2$  (curva verde) em função da iteração numérica do algoritmo implementado, mostra a evolução da determinação destes parâmetros durante o processo de convergência. Observa-se que, devido as características dos métodos empregados (ver Apêndice C) há uma redução substancial dos valores calculados pelo algoritmo, mas que há uma recuperação rápida deste valor, que tende suavemente ao valor final esperado, ou seja,  $P_1 = Q_A = 10$  e  $P_2 = m = 1.3$ . Este gráfico é muito semelhante aos obtidos para os outros casos testados neste capítulo. Estes outros gráficos não serão apresentados no corpo do texto mas, se encontram disponíveis no Apêndice E.

O processo encerrou com convergência atingida resultando nos valores  $P_1 = 9.999319581$  e  $P_2 = 1.299976271$  sendo que os valores esperados são  $P_1 = 10$  e  $P_2 = 1.3$ .

A excelente concordância entre as temperaturas de entrada e as obtidas pelo modelo com o uso dos parâmetros calculados pelo algoritmo pode ser observada na Fig. 5-4. Na verdade as curvas estão sobrepostas de forma que não é possível observar diferenças entre elas. Note-se que o conjunto de pontos em vermelho representa as temperaturas utilizadas como dados de entrada no método inverso. Com os parâmetros calculados pelo método inverso, foram obtidas as curvas em preto para  $x = 0.1$ ,  $x = 0.2$  e  $x = 0.3$ . A sobreposição desta última curva teórica com o conjunto de dados para  $x = 0.3$  (em azul), o qual não foi usado como parâmetro de entrada do algoritmo, mostra a precisão deste método.

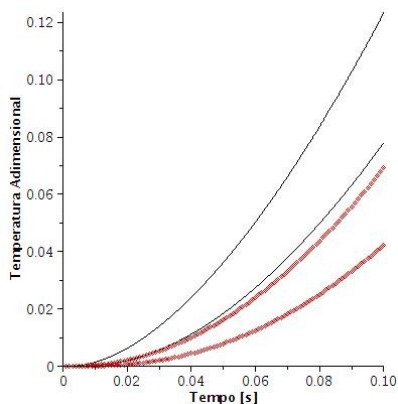


Figura 5-2 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo  $10\tau^{1,3}$  (vermelho) e a temperatura do modelo direto com os valores iniciais dos parâmetros (preto), ambas para as posições para as posições  $x = 0,1$  e  $x = 0,2$ .

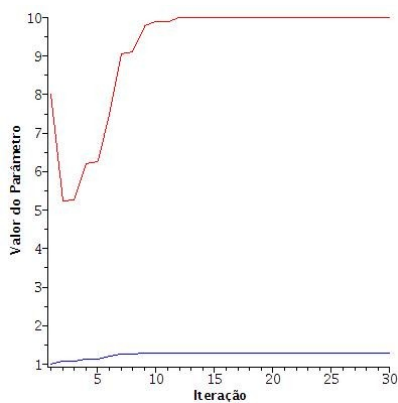


Figura 5-3 – Histórico do valor numérico dos parâmetros  $P_1$  e  $P_2$  em função do número de iterações.

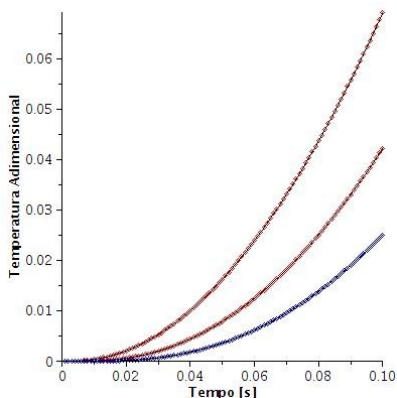


Figura 5-4 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido a condição de fluxo  $10\tau^{1.3}$  (vermelho e azul) e a temperatura do modelo direto com os valores finais dos parâmetros (preto) para as posições  $x = 0.1$ ,  $x = 0.2$  e  $x = 0.3$ .

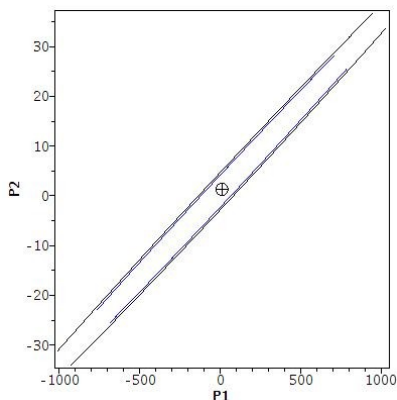


Figura 5-5 – Elipse de confiabilidade de 95% e 99% entre os parâmetros  $P_1$  e  $P_2$ .

A Figura 5-5 apresenta as elipses de confiabilidade do teste realizado. No eixo das ordenadas está o parâmetro  $P_2$  e o parâmetro  $P_1$  na abscissa. No gráfico ainda podem ser notados dois símbolos: uma cruz e um círculo. O círculo representa o valor esperado e, normalmente, desconhecido. A cruz representa o valor calculado e a mesma indica o centro das elipses de confiabilidade. A elipse de confiabilidade é uma representação de uma região no espaço  $P_1 \times P_2$  na qual existe a confiabilidade de  $y\%$  de que o valor estimado, indicado pelo círculo, encontra-se no interior do mesmo. No presente teste pode ser observado que

o valor estimado e o esperado encontram-se dentro das duas elipses. A mais externa indicando 95% de probabilidade e a mais interna de 99%.

Na sequência de testes, foi incorporado ao histórico de temperaturas geradas para o teste anterior um ruído para simular dados reais temperatura. Esse ruído foi gerado a partir de uma distribuição normal com desvio padrão de 0.002, usando uma função do Maple. O desvio padrão do ruído foi utilizado no programa como dado de entrada sobre o desvio padrão da incerteza dos dados de entrada. A distribuição das temperaturas com o ruído em função do tempo para as mesmas três posições do teste anterior é mostrada na Fig. 5-6. Novamente, foram utilizados os dados de duas curvas ( $x=0.1$  e  $x=0.2$ ) como dados de entrada para o método inverso.

Na Fig. 5-7 apresenta-se a comparação das temperaturas de entrada do método inverso e a solução analítica, empregando-se os valores de  $P_1 = 8$  e  $P_2 = 1$ , que são os valores iniciais dos parâmetros a serem ajustados. A Fig. 5-8 apresenta três conjuntos de curvas: em vermelho as temperaturas utilizadas como dados de entrada para o método inverso, em preto a distribuição de temperaturas obtida com a solução HBIM para o problema direto e o uso dos parâmetros calculados, após 30 iterações, com o algoritmo do método inverso ( $P_1 = 8.877086446$  e  $P_2 = 1.259343024$ ), para as posições  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$ , em azul a distribuição de temperatura na posição  $x = 0.3$ , que não foi empregada como dado de entrada do algoritmo.

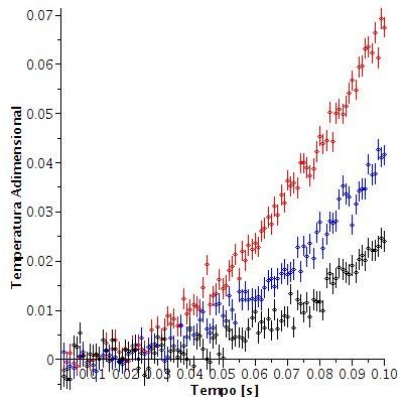


Figura 5-6 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo  $10\tau^{1.3}$  com ruído normal de desvio padrão de 0.02 para as posições  $x = 0.1$  (vermelho),  $x = 0.2$  (azul) e  $x = 0.3$  (preto).

Novamente observa-se uma excelente concordância entre as soluções mesmo com a presença de ruídos, mostrando que a técnica é robusta para o emprego com dados reais. Essa observação pode ser confirmada pelas elipses de confiabilidade apresentadas na Fig. 5-9 onde, embora o valor exato (círculo) e o valor estimado (cruz) não estejam sobrepostos, ambos se encontram no interior da elipse de 99% de confiabilidade.

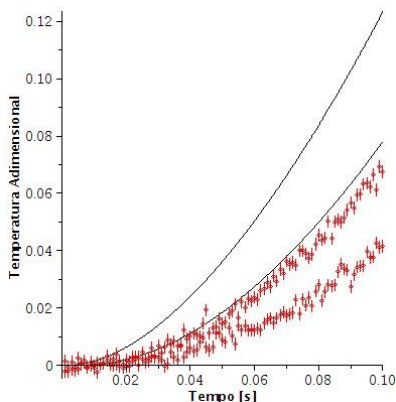


Figura 5-7 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo  $10\tau^{1.3}$  com ruído normal de desvio padrão de 0.02 (vermelho) e a temperatura do modelo direto com os valores iniciais dos parâmetros (preto), ambas para as posições  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$ .

Continuando os testes, a partir de então foi considerado para todos os testes conseqüentes um fluxo de calor tipo pulso. Do mesmo modo que foi tratado na Seção 4.3, a condição de contorno é considerada como um somatório de duas funções  $f_{01}\tau^{m_1}$  e  $-f_{02}(\tau - \tau_0)^{m_2}$ , sendo que a segunda função é definida como zero para valores de  $\tau$  menores que  $\tau_0$ . Para cada uma dessas funções existe uma solução básica correspondente e a solução geral é dada pela soma das soluções básicas. No programa utilizado foi implementada a solução geral sendo consideradas as seguintes substituições de variáveis  $f_{01} = P_1$ ,  $f_{02} = P_2$ ,  $m_1 = P_3$ ,  $m_2 = P_4$ ,  $\tau_0 = P_5$ ,  $\tau = P_6 t$ . Com isso pode-se escrever a condição de contorno de fluxo da seguinte forma:

$$Q = P_1(P_6 t)^{P_3} + P_2(P_6(t - P_5))^{P_4} \text{Heaviside}(t - P_5) \quad (5.3)$$

onde *Heaviside*  $(\tau - \tau_0)$  é a função degrau (Spiegel, 1973).

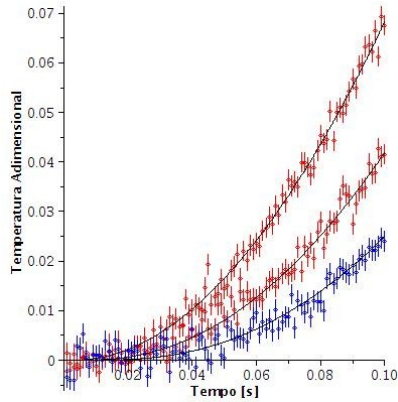


Figura 5-8 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido a condição de fluxo  $10\tau^{-1.3}$  com ruído normal de desvio padrão de 0.02 (vermelho e azul) e a temperatura do modelo direto com os valores finais dos parâmetros (preto) para as posições  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$  e  $x = 0.3$ .

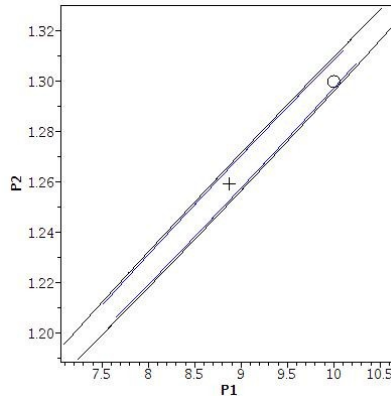


Figura 5-9 – Elipse de confiabilidade de 99% e 95% entre os parâmetros  $P_1$  e  $P_2$ .

Para obtenção dos dados de entrada utilizados nos testes foram arbitrados os seguintes valores iniciais para os parâmetros:  $P_1 = 1$ ,  $P_2 = -1$ ,  $P_3 = 0$ ,  $P_4 = 0$ ,  $P_5 = 0.025$  e  $P_6 = 1$ . Com estes parâmetros foram calculadas as temperaturas para as posições  $x = 0.1$ ,  $x = 0.2$  e  $x = 0.3$ . Estas temperaturas são mostradas na Fig. 5-10. Então são realizados três diferentes testes: no primeiro consideram-se os valores dos parâmetros  $P_5$  e  $P_6$  conhecidos e determinam-se os outros quatro; a seguir despreza-se o conhecimento existente do parâmetro  $P_5$  e necessitam-se determinar cinco parâmetros; na última o algoritmo é utilizado para determinar todos os seis parâmetros. Nos três testes os mesmos valores



iniciais são considerados para os parâmetros a serem determinados. A Tab. 5-1 apresenta a relação dos valores dos parâmetros exatos, iniciais e calculados para cada um dos testes após 30 iterações. Na tabela, a sigla NC significa Não Calculado.

As Figs. 5-11, 5-12 e 5-13 apresentam os gráficos de temperatura adimensional em função do tempo adimensional, onde as curvas em vermelho representam os dados de entrada nas posições  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$  e, em preto, as temperaturas calculadas com o uso dos parâmetros iniciais de cada teste. Na Fig. 5-11 apresentam-se as curvas para o teste de determinação de quatro parâmetros, na Fig. 5-12 a de cinco parâmetros e na Fig. 5-13 a de seis parâmetros.

Tabela 5-1 – Valores exatos, iniciais e finais para os parâmetros calculados testes sem ruído

Parâmetros	Valor Exato	Valor Inicial	4 Parâmetros	5 Parâmetros	6 Parâmetros
$P_1$	1	1.2	1.402695361	1.3312666379	1.1758440178
$P_2$	-1	-1.3	-1.300799096	-1.266392722	-1.1749316379
$P_3$	0	0.15	0.0733330652	0.0568114782	0.0253450898
$P_4$	0	0.10	0.0368191148	0.0324714779	0.0198756438
$P_5$	0.025	0.01	NC	0.0242155170	0.0244181517
$P_6$	1	1.3	NC	NC	0.9667473787

As Figs. 5-14, 5-15 e 5-16 apresentam os gráficos de temperatura adimensional em função do tempo adimensional, onde as curvas em vermelho representam os dados de entrada nas posições  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$ , em azul os dados na posição  $x = 0.3$  e, em preto, as temperaturas calculadas com o uso dos parâmetros finais de cada teste. Na Fig. 5-14 apresentam-se as curvas para o teste de determinação de quatro parâmetros, na Fig. 5-15 a de cinco parâmetros e na Fig. 5-16 a de seis parâmetros.

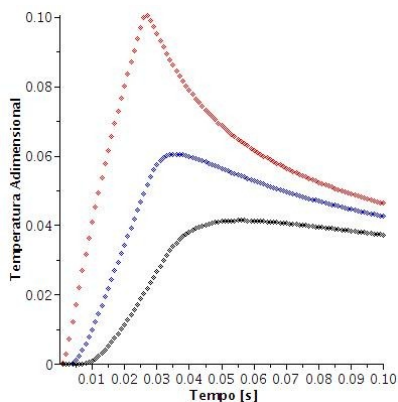


Figura 5-10 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo pulso unitário para as posições  $x = 0.1$  (vermelho),  $x = 0.2$  (azul) e  $x = 0.3$  (preto).

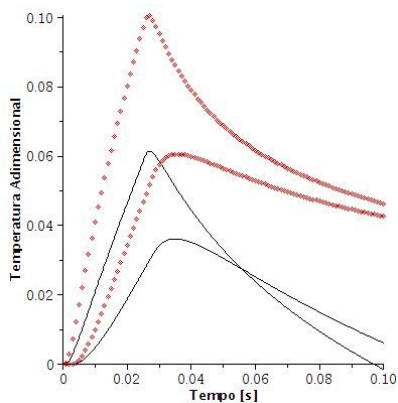


Figura 5-11 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo pulso unitário (vermelho) e a temperatura do modelo direto com os valores iniciais dos parâmetros (preto), ambas para as posições  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$  (Teste de 4 parâmetros).

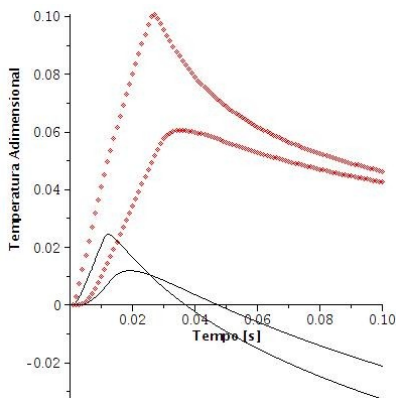


Figura 5-12 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo pulso unitário (vermelho) e a temperatura do modelo direto com os valores iniciais dos parâmetros (preto), ambas para as posições  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$  (Teste de 5 parâmetros).

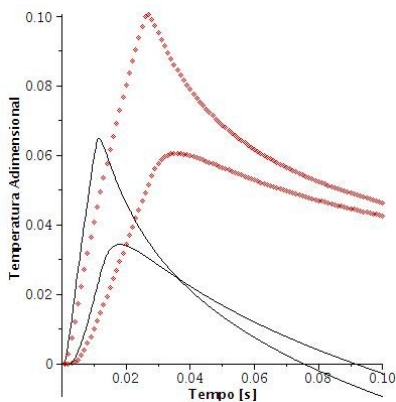


Figura 5-13 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito e difusividade adimensional 1 submetido à condição de fluxo pulso unitário (vermelho) e a temperatura do modelo direto com os valores iniciais dos parâmetros (preto), ambas para as posições  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$  (Teste de 6 parâmetros).

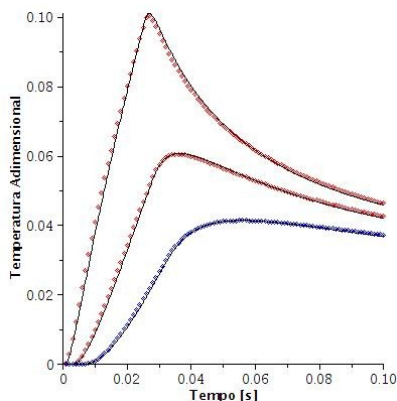


Figura 5-14 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido a condição de fluxo pulso unitário (vermelho e azul) e a temperatura do modelo direto com os valores finais dos parâmetros (preto) para as posições  $x = 0.1$ ,  $x = 0.2$  e  $x = 0.3$  (Teste 4 parâmetros).

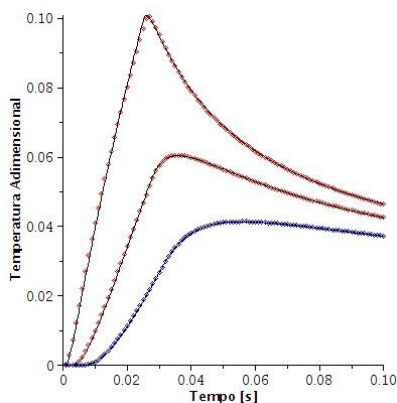


Figura 5-15 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido a condição de fluxo pulso unitário (vermelho e azul) e a temperatura do modelo direto com os valores finais dos parâmetros (preto) para as posições  $x = 0.1$ ,  $x = 0.2$  e  $x = 0.3$  (Teste 5 parâmetros)

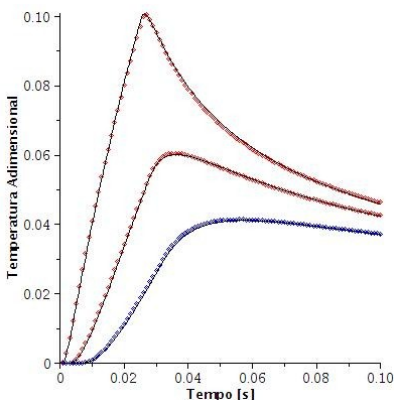


Figura 5-16 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito e difusividade adimensional 1 submetido a condição de fluxo pulso unitário (vermelho e azul) e a temperatura do modelo direto com os valores finais dos parâmetros (preto) para as posições  $x = 0.1$ ,  $x = 0.2$  e  $x = 0.3$  (Teste 6 parâmetros)

Durante a realização dos testes observou-se um incremento do tempo de processamento a medida em que mais um parâmetro era determinado. Isso porque os parâmetros  $P_5$  e  $P_6$  inserem uma não-linearidade adicional por se relacionarem entre si e com os parâmetros  $P_3$  e  $P_4$ , como pode ser observado pela Eq. 5.3.

Mesmo com essas complexidades adicionais, o algoritmo atingiu a convergência em todos os testes. Os gráficos das temperaturas calculadas com os parâmetros obtidos pelo programa são apresentados nas Figs. 5-14 a 5-16, para os casos de 4, 5 e 6 parâmetros respectivamente. Observe-se a boa concordância em cada um dos resultados apresentados.

Para concluir os testes de pulso unitário, foi adicionado ao perfil de temperaturas utilizadas como dados de entrada um ruído de distribuição normal e de desvio padrão 0.02 gerado por uma função do Maple, de forma a simular uma aquisição real de temperatura. As temperaturas utilizadas como dados de entrada, calculadas para as posições  $x = 0.1$ ,  $x = 0.2$  e  $x = 0.3$ , e já com o ruído são apresentadas na Fig. 5-17.

De forma análoga ao que foi realizado na análise dos casos sem ruído a Tabela 5-2 apresenta os valores exatos, iniciais e calculados para os parâmetros  $P_1$  a  $P_6$  nos casos calculados após 30 iterações.

Tabela 5-2 – Valores exatos, iniciais e finais para os parâmetros calculados testes com ruído

Parâmetros	Valor Exato	Valor Inicial	4 Parâmetros	5 Parâmetros	6 Parâmetros
$P_1$	1	1.2	1.0469765253	1.155630943	1.1648437345
$P_2$	-1	-1.3	-1.0657677258	-1.171215636	-1.191841544
$P_3$	0	0.15	0.0102427127	0.0287617662	0.0247720292
$P_4$	0	0.10	0.0125071280	0.0270478013	0.0274276957
$P_5$	0.025	0.02	NC	0.0244646525	0.0240356283
$P_6$	1	1.3	NC	NC	0.9767241695

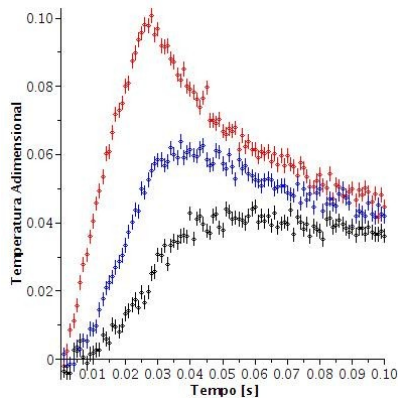


Figura 5-17 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo pulso unitário com ruído normal de desvio padrão de 0.02 para as posições  $x = 0.1$  (vermelho),  $x = 0.2$  (azul) e  $x = 0.3$  (preto).

As Figs. 5-18 a 5-20 mostram, em função do tempo, os gráficos das temperaturas adimensionais usadas como dados de entrada com ruído em vermelho e em preto as curvas de temperatura calculadas com uso dos valores iniciais dos parâmetros para os casos de determinação de 4, 5 e 6 parâmetros respectivamente.

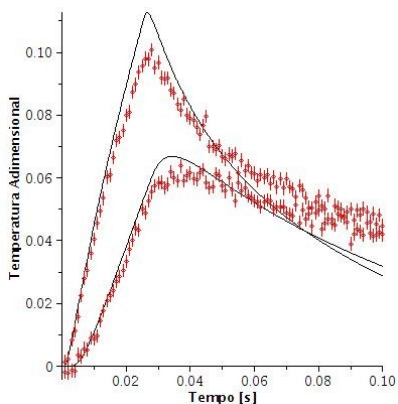


Figura 5-18 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo pulso unitário com ruído normal de desvio padrão de 0.02 (vermelho) e a temperatura do modelo direto com os valores iniciais dos parâmetros (preto), ambas para as posições  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$  (Teste 4 parâmetros).

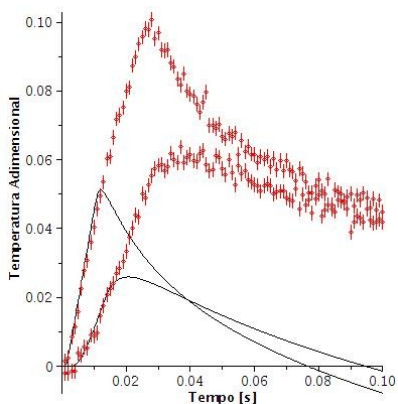


Figura 5-19 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido à condição de fluxo pulso unitário com ruído normal de desvio padrão de 0.02 (vermelho) e a temperatura do modelo direto com os valores iniciais dos parâmetros (preto), ambas para as posições  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$  (Teste 5 parâmetros).

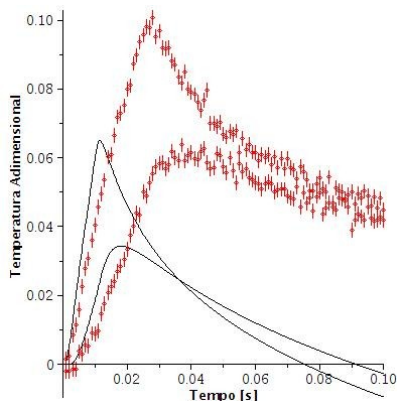


Figura 5-20 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito e difusividade adimensional 1.3 submetido à condição de fluxo pulso unitário com ruído normal de desvio padrão de 0.02 (vermelho) e a temperatura do modelo direto com os valores iniciais dos parâmetros (preto), ambas para as posições  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$  (Teste 6 parâmetros).

Finalmente, as Figs. 5-21 a 5-23 apresentam, para os casos de determinação de 4, 5 6 parâmetros respectivamente, três conjuntos de curvas: em vermelho as temperaturas utilizadas como dados de entrada para o método inverso, em preto a distribuição de temperaturas obtida com a solução para o problema direto com o uso dos parâmetros calculados com o algoritmo do método inverso, para as posições  $x = 0.1$ ,  $x = 0.2$  e  $x = 0.3$  e em azul a distribuição de temperatura na posição  $x = 0.3$ , que não foi empregada como dado de entrada do algoritmo. Em todos os casos observa-se uma excelente concordância entre as soluções mesmo com a presença de ruídos, ratificando o que foi mencionado anteriormente que a técnica é robusta para o emprego com dados reais.

### 5.3 CONCLUSÕES

Neste capítulo foi feito o desenvolvimento e implementação de um algoritmo para a solução do problema inverso de condução de calor a partir da solução direta do caso de sólido semi-infinito com fluxo prescrito obtida pelo HBIM. Este desenvolvimento foi implementado e submetido a oito testes teóricos, em que os dados de entrada para o programa de solução inversa foram gerados computacionalmente.

No primeiro teste a implementação foi utilizada para a determinação de 2 parâmetros da condição de fluxo prescrito com grande sucesso. No segundo teste um ruído foi adicionado aos dados de entrada de forma a



simular dados obtidos experimentalmente e, novamente, os resultados observados foram muito bons.

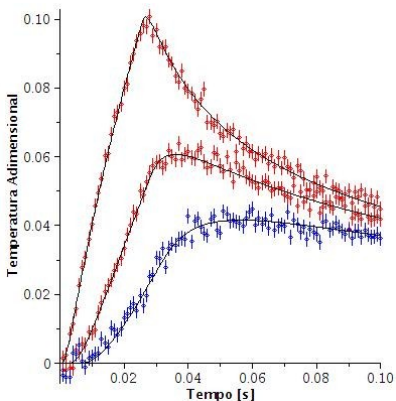


Figura 5-21 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido a condição de fluxo pulso unitário com ruído normal de desvio padrão de 0.02 (vermelho e azul) e a temperatura do modelo direto com os valores finais dos parâmetros (preto) para as posições  $x = 0.1$ ,  $x = 0.2$  e  $x = 0.3$  (Teste 4 parâmetros).

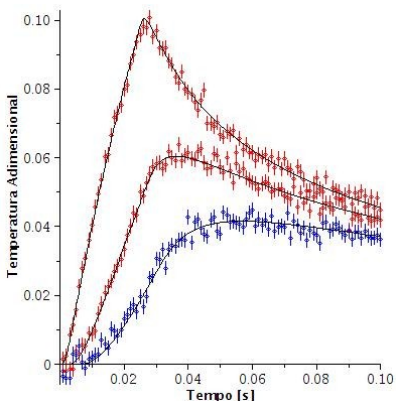


Figura 5-22 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito submetido a condição de fluxo pulso unitário com ruído normal de desvio padrão de 0.02 (vermelho e azul) e a temperatura do modelo direto com os valores finais dos parâmetros (preto) para as posições  $x = 0.1$ ,  $x = 0.2$  e  $x = 0.3$  (Teste 5 parâmetros).

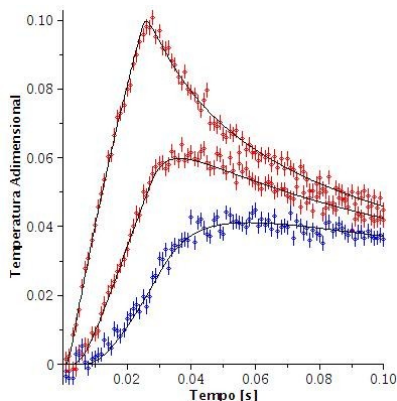


Figura 5-23 – Temperatura adimensional em função do tempo para sólido semi-infinito e difusividade adimensional 1 submetido a condição de fluxo pulso unitário com ruído normal de desvio padrão de 0.02 (vermelho e azul) e a temperatura do modelo direto com os valores finais dos parâmetros (preto) para as posições  $x = 0.1$ ,  $x = 0.2$  e  $x = 0.3$  (Teste 6 parâmetros).

A partir do terceiro teste até o quinto, um mesmo conjunto de dados gerados foi utilizado para todos os testes. Nestes casos foram calculados quatro, cinco e seis parâmetros respectivamente. Em todos os casos foi obtida uma boa concordância entre os dados de entrada e o perfil de temperatura gerada com os parâmetros calculados com trinta iterações.

Do sexto ao oitavo testes um ruído de distribuição normal foi adicionado ao conjunto de dados para simular as incertezas de uma medida real. Novamente uma excelente concordância entre as temperaturas usadas como dados de entrada e as geradas com os parâmetros calculados foi verificada.

Do primeiro ao oitavo teste as exigências sobre o algoritmo implementado foram aumentando gradativamente e em todos os testes o mesmo se mostrou bastante robusto, atingindo as expectativas em todas as situações analisadas.

Foi realizado outro teste, partindo dos resultados do oitavo teste, explorando a influência das condições iniciais na convergência do algoritmo. Os resultados não são apresentados neste trabalho por não serem conclusivos. O que pode ser inicialmente observado é que, dependendo dos valores iniciais de cada um dos parâmetros, pode haver a divergência ou a convergência para outro conjunto de valores que não o esperado. Isso ocorre porque outro conjunto de parâmetros pode fornecer o mesmo histórico de temperaturas. Um estudo detalhado sobre o fenômeno deve ser objetivo de trabalhos futuros.

Importante ressaltar que essa abordagem de solução do problema inverso não seria possível com o uso das soluções clássicas como solução direta. Essa impossibilidade reside no fato de que as soluções clássicas não permitem o uso de valores de grau,  $m$ , não-inteiros em suas formulações. Por isso, no caso de utilização de soluções clássicas em problemas inverso, normalmente é utilizado um algoritmo baseado em obtenção dos coeficientes de uma expressão polinomial de grau inicialmente definido. Essa abordagem, por envolver um maior número de termos de somatório das soluções é extremamente dispendiosa de recursos computacionais.

Uma possibilidade de complementação da pesquisa sobre o uso das soluções de HBIM para problemas inversos é a de investigação da dependência do valor de  $n$  com a influência da superfície B. O que fará deste método ainda mais valoroso e útil no campo da engenharia.



## 6 CONCLUSÕES

O amplo espectro de aplicações existentes na engenharia que envolvem o conhecimento e previsão do comportamento térmico de materiais, devido ao fenômeno de condução de calor, justificam a necessidade de se desenvolver permanentemente ferramentas de cálculo e projeto que sejam simples, rápidas e que apresentem um grau de acurácia compatível com a aplicação que se destina.

Assim, nesta tese uma nova abordagem do Método do Balanço Integral (HBIM) é apresentada. Tradicionalmente, nos métodos HBIM, empregam-se polinômios para o ajuste da distribuição de temperaturas. No presente trabalho uma função envolvendo um expoente de grau  $n$  é sugerida e empregada. O perfil proposto possui duas partes distintas, a primeira para o período de sólido semi-infinito, na forma de uma expressão de grau  $n$ , onde o mesmo pode possuir qualquer valor real ou mesmo variar com o tempo; e a segunda, baseada na forma de regime permanente para o sólido finito com um termo de transição. Essa proposta de perfil também é original do autor. A partir do perfil proposto foi desenvolvida uma série de soluções para as mais diversas combinações de condições de contorno. Expressões matemáticas para a determinação do melhor valor do parâmetro  $n$ , baseadas nas soluções clássicas do problema de sólido semi-infinito nas diversas condições de contorno da superfície livre são obtidas neste trabalho.

De forma a permitir análises sobre as soluções obtidas com a nova abordagem do HBIM foi desenvolvida, no âmbito deste trabalho, uma série de soluções a partir dos métodos clássicos – Laplace e Separação de Variáveis – com o uso da condição de contorno geral, obtendo-se um desenvolvimento inédito na literatura. Nesse desenvolvimento é demonstrado que, na realidade, a solução obtida pelo método de separação de variáveis é algebricamente igual ao da transformada de Laplace para a situação de tempo longo, quando o teorema de Duhamel é empregado nas soluções obtidas por separações de variáveis.

Para todos os métodos (clássicos e HBIM) foram considerados problemas de condução de calor unidimensional nos caso de sólido semi-infinito e sólido finito. No caso de sólido semi-infinito foram consideradas as condições de contorno usuais, temperatura prescrita, fluxo de calor prescrito e convecção, para a superfície livre. Já no sólido finito todas as combinações de condições de contorno (temperatura, fluxo e convecção) em ambas as superfícies foram analisadas.

Todas as condições de contorno adotadas no trabalho podem ou não ser variáveis no tempo. A dependência das condições de contorno com o tempo é modelada a partir da expressão  $f_0 \tau^m$ , sendo que o parâmetro  $m$  determina o tipo de variação temporal. Para comparação entre as soluções

clássicas e as obtidas pelo HBIM uma solução por volumes finitos (VF) foi obtida para cada um dos casos analisados. As soluções de VF foram utilizadas, nesta tese, como soluções base de comparação (benchmark). Para as comparações foram escolhidos valores dos parâmetros  $m$  e  $f_0$  que permitissem a solução pelos métodos clássicos, uma vez que os mesmos exigem o emprego de valores  $m$  inteiros enquanto que o método HBIM pode ser empregado em qualquer situação. Dentro desse limitante, três casos envolvendo condições de contorno variáveis com o tempo foram testados neste estudo: independente do tempo, com variação linear no tempo e formato de pulso.

A partir desta comparação, verificou-se que os métodos clássicos sempre comparam bem com VF e que o HBIM também é bastante preciso, podendo ser empregado especialmente para casos cujas condições de contorno são de convecção e de temperatura prescrita. Para os casos de convecção, o método só não apresenta uma boa comparação para instantes em que aumenta a influência da superfície B. Esta situação ocorre devido ao fato de que o valor do parâmetro  $n$  empregado é baseado nas condições de contorno da superfície A. Desta forma acredita-se que o emprego de um parâmetro  $n$  variável com o tempo faria do HBIM tão preciso quanto qualquer outro método clássico da literatura. Sugere-se esta pesquisa para um trabalho futuro. Nas comparações realizadas destacou-se uma grande vantagem no uso do HBIM que é o menor tempo de processamento computacional para a obtenção das soluções. O menor tempo computacional, junto com a precisão do método e a flexibilidade do mesmo em tratar situações com valores de  $m$  não-inteiros faz com que este método seja um forte candidato para aplicação em métodos inversos.

Para testar a eficiência do HBIM na aplicação em métodos inversos, um procedimento de duas etapas foi adotado. Na primeira etapa, soluções diretas de problemas de condução de calor em sólido semi-infinito com condição de contorno de fluxo prescrita, obtidas a partir do HBIM, são empregadas para a obtenção de dados de distribuição de temperatura no espaço e no tempo. Esta distribuição é utilizada para calcular o histórico de temperaturas em relação ao tempo nas posições  $x=0,1$  e  $x=0,2$ . Os históricos calculados são utilizados como dados de entrada para o problema inverso de condução de calor. A condição de fluxo prescrita é aproximada por uma expressão de seis parâmetros. A técnica de Mínimos Quadrados é empregada para a montagem do problema inverso e o método de Gradiente Conjugado Não-linear com Rewton-Raphson e Polak-Ribière é utilizado para a obtenção dos parâmetros relativos ao fluxo. A partir dos parâmetros calculados e usando a solução analítica, proveniente do HBIM, obtêm-se uma nova distribuição de temperatura em função do tempo e do espaço. Essa nova distribuição é comparada com a distribuição utilizada como dado

de entrada e a uma outra posição,  $x=0.3$ , não utilizada como dado de entrada. Todo o algoritmo é implementado e testado com o uso do software de manipulação algébrica Maple.

Para a segunda etapa um ruído de distribuição normal é adicionado aos dados teóricos empregados como entrada no algoritmo do método inverso. Esta adição do ruído serve para simular casos reais, onde, a partir de temperaturas medidas em um experimento, deseja-se obter dados desconhecidos como as condições de contorno na superfície (fluxo prescrito, temperatura ou convecção) ou algumas propriedades termofísicas, como a difusividade térmica. Nesse caso, com o ruído, o mesmo procedimento e análise do caso dos dados de entrada sem ruídos foram realizados.

Conforme a escolha de implementação o caso de fluxo prescrito foi analisado em quatro situações sem ruído e com ruído. São elas: fluxo monotônico, desconhecendo-se intensidade e grau de variação – problema com análise de dois parâmetros; fluxo de pulso, desconhecendo-se intensidade e grau de variação e conhecendo-se tempo de término do pulso e difusividade térmica – 4 parâmetros; fluxo de pulso desconhecendo-se a intensidade, grau de variação e tempo de duração do pulso, com difusividade térmica conhecida – 5 parâmetros; e fluxo de pulso, desconhecendo-se a intensidade, grau de variação, tempo de duração do pulso e difusividade térmica.

Em todos os casos, escolhidos por representar situações reais, o método inverso, aplicado a dados obtidos a partir da solução por HBIM, se mostrou muito preciso, mostrando que o HBIM é adequado para o uso em algoritmos de soluções inversas. Note-se que o procedimento apresentado na solução do problema inverso não seria aplicável com o uso dos métodos clássicos, pois a obtenção de parâmetros não inteiros nos expoentes das expressões relativas às condições de contorno não são admissíveis em tais soluções. Este fato colabora na demonstração da utilidade dos métodos integrais.

Resumindo, as principais contribuições do presente trabalho de tese são:

- Desenvolvimento de uma nova família de soluções a partir do uso de um novo perfil de temperatura no Método de Balanço Integral do Calor (HBIM);
- Obtenção de expressões algébricas que relacionam o grau do expoente  $n$ , utilizado no novo perfil proposto para o HBIM, e a condição de contorno da superfície livre no caso de sólido semi-infinito;

- Desenvolvimento de uma nova abordagem das técnicas clássicas de Separação de Variáveis e Transformada de Laplace pelo uso de uma condição de contorno Global;
- Demonstração da igualdade algébrica das soluções obtidas pela técnica de Separação de Variáveis com aplicação do Teorema de Duhamel e pela Técnica da Transformada de Laplace para tempo longo;
- Demonstração, por comparação com as técnicas clássicas, da aplicabilidade das soluções obtidas por HBIM na obtenção de resultados de interesse de engenharia;
- Desenvolvimento e teste de ferramenta de solução de problema inverso de condução de calor semi-infinito baseado em solução direta do HBIM para a determinação simultânea de fluxo prescrito e difusividade térmica.

Para a continuação do presente trabalho de pesquisa, são propostos os seguintes temas:

- Obtenção de expressões algébricas que relacionam o grau do expoente  $n$ , utilizado no novo perfil proposto para o HBIM, e a condição de contorno em ambas as superfícies no caso de sólido finito;
- Desenvolvimento e teste de ferramenta de solução de problema inverso de condução de calor semi-infinito baseado em solução direta do HBIM para a determinação simultânea de temperatura prescrita, convecção e difusividade térmica.
- Complementação da família de soluções desenvolvidas a partir do perfil de temperatura proposto neste trabalho ao HBIM para as condições de contorno de ablação e radiação;
- Complementação da família de soluções desenvolvidas a partir do perfil de temperatura proposto neste trabalho ao HBIM para as condições de propriedades térmicas dependentes da temperatura;
- Complementação da família de soluções desenvolvidas a partir do perfil de temperatura proposto neste trabalho ao HBIM para geometrias ortogonais generalizadas;
- Aplicação da família de soluções desenvolvidas a partir do perfil proposto e uso de técnicas integrais similares ao HBIM para a solução de outra classe de problemas tais como hidrodinâmica e difusão de massa.
- Pesquisa da influência das condições iniciais sobre a convergência dos parâmetros estimados na solução de problemas inversos de condução de calor baseado em solução direta do HBIM.



## REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions – with formulas, graphs, and mathematical tables**. New York: Dover Publications Inc., 1972.
- ARPACI, V. S. **Conduction Heat Transfer**. London: Addison-Wesley Publishing Company, 1966.
- BACK, J. V., COLE, K. D., HAJI-SHEIK, A., LITKOUHI, B. **Heat Conduction using Green's Functions**. Washington – DC: Hemisphere Publishing Corporation, 1992.
- BRAGA, W. F. **Modelo de analogia elétrica para problemas de ablação unidimensional**, Dissertação de mestrado defendida no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – UFSC. Florianópolis: UFSC, 2002.
- BRAGA, W. F., MANTELLI, M. B. H. **Analytical Solution for One-Dimensional Finite Heat Conduction Problem with Heat Balance Integral Method**. In: 41th AIAA Thermophysical Conference, San Antonio: AIAA, 2009.
- BRAGA, W. F., MANTELLI, M. B. H., AZEVEDO, J. L. F. **A New Approach for the Heat Balance Integral Method Applied to Heat Conduction Problems**. In: 43th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno: AIAA, 2005.
- BRAGA, W. F., MANTELLI, M. B. H., AZEVEDO, J. L. F. **Analytical Solution for One-Dimensional Semi-Infinite Heat Transfer Problem with Convection Boundary Condition**. In: AIAA 38th Thermophysics Conference, Toronto: AIAA, 2005.
- BRAGA, W. F., MANTELLI, M. B. H., AZEVEDO, J. L. F. **Approximated Analytical Solution for One-Dimensional Ablation Problem with Time-Variable Heat Flux**. In: 36th AIAA Thermophysical Conference, Orlando: AIAA, 2003.
- BRAGA, W. F., MANTELLI, M. B. H., AZEVEDO, F. **Approximate Analytical Solution for One-Dimensional Finite Ablation Problem with Time-Constant Heat Flux**. In: AIAA 37th Thermophysics Conference, Portland: AIAA, 2004.

BRAGA, W., MANTELLI, M. B. H. **Electrical analogy modeling for one-dimensional ablation problem.** In: 7th AIAA/ASME Thermophysics Joint Conference, St. Louis: 2002.

CARSLAW, H. S., JAEGER, J. C. **Conduction of Heat in Solids**, 2<sup>nd</sup> ed. London: Oxford University Press, 1959.

FOURIER, J. B. J. **The Analytical Theory of Heat** (1822), traduzido por: Alexander Freeman. Cambridge: Cambridge University Press, 1878.

GOODMAN, T. R. **Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat Transfer**, Advances in Heat Transfer, Vol. 1, New York: Academic Press, pp. 51-122, 1964.

GOODMAN, T. R. **This Week's Citation Classic**, Current Contents, No. 23, Jun 6, 1983.

HELENE, O. A. M., VANIN, V. R. **Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental-** 2<sup>a</sup> edição. São Paulo: Editora Blucher, 1991.

HELENE, O. **Método dos Mínimos Quadrados com Formalismo Matricial.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

HIMMELBLAU, D. M. **Applied Nonlinear Programming.** New York: McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.

HRISTOV, J. **The heat-balance integral method by a parabolic profile with unspecified exponent: Analysis and benchmark exercises.** Thermal Science, Vol. 13, No. 2, pp.27-48, 2009.

JOHNSON, C. L. **Analog Computer Techniques.** New York: McGraw-Hill Inc., 1963.

KAKAÇ, S., YENER, Y. **Heat Conduction.** Yaylor & Francis, 1993.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics.** New York: John Wiley and Sons Inc., 1999.

LANGFORD, D. **The heat balance integral method.** Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 16, pp. 2424-2428, 1973.

LUIKOV, A. V. **Analytical Heat Diffusion Theory.** New York: Academic Press, 1968.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional.** Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora, 1995.

- MYERS, G. E. **Analytical Methods in Conduction Heat Transfer**. 2<sup>nd</sup> edition. Madison: AMCHT Publication, 1998.
- MYERS, T. G. **Optimizing the exponent in the heat balance and refined integral methods**. Int. Commun. Heat Mass Transfer. (2008), doi:10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.10.013.
- ÖZISIK, M. N. **Heat Conduction**. 2<sup>nd</sup> ed. New York: John Wiley & Sons, 1993.
- ÖZISIK, M. N., ORLANDE, H. R. B. **Inverse Heat Transfer – Fundamentals and Applications**. New York: Taylor and Francis, 2000.
- PATANKAR, S. V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. Washington – DC: Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- SADOUN, N., SI-AHMED, E., COLINET, P., LEGRAND, J. **On the Goodman Heat-Balance Integral Methods for Stefan like problems: Further considerations and refinements**. Thermal Science, Vol. 13, No. 2, pp. 81-96, 2009.
- SCHEWCHUK, J. R. **An Introduction to the Conjugate Gradient Method without the Agonizing Pain**. 1994. Acessado na internet: <http://www.cs.cmu.edu/~quake-papers/painless-conjugate-gradient.pdf> em: Junho 2007.
- SCHIFF, J. L. **The Laplace Transform: Theory and Applications**. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- SOBRINHO, A. S. C. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2006.
- SPIEGEL, M. R., **Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas**”, traduzido por Chioccarello, R. São Paulo: McGraw-Hill, 1973.
- TRUESDELL, C. **The tragicomical history of thermodynamics 1822-1854**. Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences – Volume 4. New York: Springer-Verlag, 1980.
- VUJANOVIC, B. D., BACLIC, B. S. **Variational Solutions of Transient Heat Conduction Through Bodies of Finite Length**. Advances in Heat Transfer, Vol. 24, New York: Academic Press, pp. 39-99, 1994.
- WANG, L., ZHOU, X., WEI, X. **Heat Conduction – Mathematical Models and Analytical Solutions**, Berlin: Springer-Verlag, 2008.

WOOD, S., MOSALLY, F., AL-FHAID A. **On High-Order Polynomial Heat-Balance Integral Implementations**. Thermal Science, Vol. 13, No. 2, pp. 11-25 ,2009.

## APÉNDICE



## APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO DO CONJUNTO TRANSFORMADA/INVERSA DE LAPLACE

Para a obtenção de diversas soluções pelo método da transformada de Laplace, conforme apresentadas na presente tese, foi necessário o desenvolvimento de um par de transformada não encontrada nas tabelas e manuais disponíveis para consulta. A seguir esse desenvolvimento é apresentado.

### DESENVOLVIMENTO DE TRANSFORMADA INVERSA DE

$$\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{(m+1)/2}(\sqrt{s+Bi})^k}$$

Reescrevendo  $\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{(m+1)/2}(\sqrt{s+Bi})^k}$  como uma razão  $\frac{F(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$  onde

$$F(\sqrt{s}) = \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{\sqrt{s}^m (\sqrt{s+Bi})^k} \cdot \quad \text{Logo, pode-se escrever}$$

$$F(s) = \frac{e^{-xs}}{s^m (s+Bi)^k} \cdot \quad \text{Esta expressão pode ser definida como}$$

$$F(s) = e^{-xs} G(s) \quad \text{onde} \quad G(s) = \frac{1}{s^m (s+Bi)^k} \cdot \quad \text{Por sua vez, esta última}$$

pode ser escrita como  $G(s) = H(s)M(s)$  sendo  $H(s) = \frac{1}{s^m}$  e

$$M(s) = \frac{1}{(s+Bi)^k} \cdot$$

Das tabelas de transformadas de Laplace (Abramowitz, 1972) têm-se que

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^m}\right] = \frac{\tau^{m-1}}{\Gamma(m)} \quad \text{e} \quad L^{-1}\left[\frac{1}{(s+Bi)^k}\right] = \frac{\tau^{k-1} e^{-Bi\tau}}{\Gamma(k)}$$

Assim, pelo teorema da convolução, pode-se obter

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^m(s+Bi)^k}\right] = \int_0^\tau \frac{u^{m-1}}{\Gamma(m)} \frac{(\tau-u)^{k-1} e^{-Bi(\tau-u)}}{\Gamma(k)} du$$

que após algumas manipulações algébricas pode ser reescrita na forma

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^m(s+Bi)^k}\right] = \frac{(-1)^{k-1} e^{-Bi\tau}}{\Gamma(m)\Gamma(k)(-Bi)^{m+k-1}} \int_0^\tau (-Bi u)^{m-1} (Bi\tau + (-Bi u))^{k-1} e^{Bi u} d(-Bi u)$$

Definindo-se a mudança de variável  $\beta = -Bi u$  e aplicando-a na expressão anterior têm-se

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^m(s+Bi)^k}\right] = \frac{(-1)^{k-1} e^{-Bi\tau}}{\Gamma(m)\Gamma(k)(-Bi)^{m+k-1}} \int_0^{-Bi\tau} \beta^{m-1} (Bi\tau + \beta)^{k-1} e^{-\beta} d\beta$$

que pode ser reformulada com o uso das séries binomiais (Abramowitz, 1972) apresentando-se na forma

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^m(s+Bi)^k}\right] = \frac{(-1)^{k-1} e^{-Bi\tau}}{\Gamma(m)\Gamma(k)(-Bi)^{m+k-1}} \int_0^{-Bi\tau} \beta^{m-1} \left( \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(j+1)\Gamma(k-j)} (Bi\tau)^{k-1-j} \beta^j \right) e^{-\beta} d\beta$$

Invertendo-se a ordem entre somatório e integral e isolando na integral apenas os termos relativos a mesma obtêm-se a expressão



$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^m(s+Bi)^k}\right] = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^m e^{-Bi\tau}}{\Gamma(m)\Gamma(j+1)\Gamma(k-j)} \frac{(Bi\tau)^{k-1-j}}{(Bi)^{m+k-1}} \int_0^{\tau} \beta^{m+j-1} e^{-\beta} d\beta$$

Resolvendo-se a integral a expressão fica na forma

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^m(s+Bi)^k}\right] = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^m e^{-Bi\tau}}{\Gamma(m)\Gamma(j+1)\Gamma(k-j)} \frac{(Bi\tau)^{k-1-j}}{(Bi)^{m+k-1}} \Gamma(m+j) \left(1 - e^{Bi\tau} \sum_{r=0}^{m+j-1} \frac{(-Bi\tau)^r}{\Gamma(r+1)}\right)$$

que pode ser rearranjada sendo, finalmente, escrita na forma

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^m(s+Bi)^k}\right] = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^m \Gamma(m+j) Bi^{-(j+m)}}{\Gamma(m)\Gamma(j+1)\Gamma(k-j)} \left( \tau^{k-1-j} e^{-Bi\tau} - \sum_{r=0}^{m+j-1} (-Bi)^r \frac{\Gamma(k-j+r)}{\Gamma(r+1)} \frac{\tau^{k-1-j+r}}{\Gamma(k-j+r)} \right)$$

Usando-se a expressão anterior em conjunto com o teorema da defasagem (apresentado na Tab.2-3 desta tese) têm-se a transformada inversa de  $F(s)$ , que pode ser apresentada como sendo

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-xs}}{s^m(s+Bi)^k}\right] = \left( \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^m \Gamma(m+j) Bi^{-(j+m)}}{\Gamma(m)\Gamma(j+1)\Gamma(k-j)} \left( (\tau-x)^{k-1-j} e^{-Bi(\tau-x)} - \sum_{r=0}^{m+j-1} (-Bi)^r \frac{\Gamma(k-j+r)}{\Gamma(r+1)} \frac{(\tau-x)^{k-1-j+r}}{\Gamma(k-j+r)} \right) \right) Heaviside(\tau-x)$$

Desta expressão pode-se aplicar o teorema de Efros para se calcular a transformada inversa da função de interesse inicial,

$$L^{-1} \left[ \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{(m+1)/2} (\sqrt{s} + Bi)^k} \right] = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^m \Gamma(m+j) Bi^{-(j+m)}}{\Gamma(m)\Gamma(j+1)\sqrt{\pi\tau}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{4\tau}} e^{-Bi(u-x)} \frac{(u-x)^{k-1-j}}{\Gamma(k-j)} du$$

$$- \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{m+j-1} \frac{(-1)^{m+r} Bi^{-(j+m-r)} \Gamma(m+j)\Gamma(k-j+r)}{\Gamma(m)\Gamma(j+1)\Gamma(k-j)\Gamma(r+1)\sqrt{\pi\tau}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{4\tau}} \frac{(u-x)^{k-1-j+r}}{\Gamma(k-j+r)} du$$

Rearranjando-se a expressão, com o objetivo de realizar as integrações de forma analítica, têm-se

$$L^{-1} \left[ \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{(m+1)/2} (\sqrt{s} + Bi)^k} \right] =$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^m 2\Gamma(m+j) Bi^{-(j+m)}}{\Gamma(m)\Gamma(j+1)\sqrt{\pi}} (\sqrt{4\tau})^{(k-j-1)} e^{Bi x + Bi^2 \tau} \int_x^{\infty} e^{-\left(\frac{u}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau}\right)^2} \left( \frac{u}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} - \frac{x}{\sqrt{4\tau}} - Bi\sqrt{\tau} \right)^{k-1-j} d \frac{u}{\sqrt{4\tau}}$$

$$- \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{m+j-1} \frac{(-1)^{m+r} 2 Bi^{-(j+m-r)} \Gamma(m+j)\Gamma(k-j+r)}{\Gamma(m)\Gamma(j+1)\Gamma(k-j)\Gamma(r+1)\sqrt{\pi}} (\sqrt{4\tau})^{(k-j+r-1)} \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{4\tau}}}{\Gamma(k-j+r)} \left( \frac{u}{\sqrt{4\tau}} - \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right)^{k-1-j+r} d \frac{u}{\sqrt{4\tau}}$$

Fazendo-se então a seguinte substituição de variáveis,  $\beta = \frac{u}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau}$ , têm-se a expressão na forma

$$L^{-1} \left[ \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{(m+1)/2} (\sqrt{s} + Bi)^k} \right] =$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^m \Gamma(m+j) Bi^{-(j+m)}}{\Gamma(m)\Gamma(j+1)} (\sqrt{4\tau})^{(k-j-1)} e^{Bi x + Bi^2 \tau} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\left(\frac{x}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau}\right)}^{\infty} \frac{e^{-\beta^2}}{\Gamma(k-j)} \left( \beta - \left( \frac{x}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right) \right)^{k-1-j} d\beta$$

$$- \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{m+j-1} \frac{(-1)^{m+r} Bi^{-(j+m-r)} \Gamma(m+j) \Gamma(k-j+r)}{\Gamma(m)\Gamma(j+1)\Gamma(k-j)\Gamma(r+1)} (\sqrt{4\tau})^{(k-j+r-1)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \frac{e^{-\gamma^2}}{\Gamma(k-j+r)} \left( \gamma - \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right)^{k-1-j+r} d\gamma$$

Desta expressão calcula-se as integrais (Abramowitz, 1972) e obtêm-se

$$L^{-1} \left[ \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{(m+1)/2} (\sqrt{s} + Bi)^k} \right] =$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^m \Gamma(m+j) (\sqrt{4\tau})^{(k-j-1)}}{\Gamma(m)\Gamma(j+1)Bi^{(j+m)}} e^{Bix + Bi^2 \tau} \operatorname{erfc} \left( k-j-1, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right)$$

$$- \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{m+j-1} \frac{(-1)^{m+r} \Gamma(m+j)\Gamma(k-j+r) (\sqrt{4\tau})^{(k-j+r-1)}}{\Gamma(m)\Gamma(j+1)\Gamma(k-j)\Gamma(r+1)Bi^{(j+m-r)}} \operatorname{erfc} \left( k-j+r-1, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right)$$

que pode ser reorganizada, expressa e usada na forma

$$L^{-1} \left[ \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{(m+1)/2} (\sqrt{s} + Bi)^k} \right] =$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^m \Gamma(m+j) (\sqrt{4\tau})^{(k-j-1)}}{\Gamma(m)\Gamma(j+1)Bi^{(j+m)}} \left( e^{Bix + Bi^2 \tau} \operatorname{erfc} \left( k-j-1, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} + Bi\sqrt{\tau} \right) \right.$$

$$\left. - \sum_{r=0}^{m+j-1} \frac{\Gamma(k-j+r)}{\Gamma(k-j)\Gamma(r+1)} (-Bi\sqrt{4\tau})^r \operatorname{erfc} \left( k-j+r-1, \frac{x}{\sqrt{4\tau}} \right) \right)$$

## APÊNDICE B – CÓDIGO DIRETO DESENVOLVIDO

Neste anexo é apresentado um dos dois principais códigos desenvolvidos para a realização das simulações que foram analisadas e comparadas no presente trabalho. O código não está documentado ou comentado por terem sido de uso exclusivo do programador.

No código de solução direta foram programadas as rotinas de solução do problema de condução de calor unidimensional fazendo uso dos quatro métodos comparados no capítulo 4 da presente tese: Volumes Finitos, Laplace Tempo Longo, Laplace Tempo Curto e Balanço Integral do Calor. As soluções foram implementadas em módulos não comunicantes, isto é, são necessárias modificações em cada um dos trechos do código para a implementação das condições de contorno de interesse.

### CÓDIGO FONTE DO PROGRAMA DE SOLUÇÃO DIRETA EM MAPLE

```
# Volumes Finitos
restart: gc(): with(plots): with(LinearAlgebra): with(ExcelTools):
Nom:="C:\\Transfer\\";
nplan:=0:
Ta:=1: Qa:=1: Ti:=1: Bi:=5: mt:=1: mf:=1: mc:=1:
# Parâmetros Físicos
TF:=1: # Tempo Final
L:=1: # Comprimento Característico
# Parâmetros de Volumes Finitos
NV:=100: # Número de Volumes Espaciais
NTp:=100: # Número de Passos Temporais
# Inicialização da Álgebra
A:=Matrix(NV+2,NV+2,0):
B:=Matrix(NV+2,NV+2,0):
F:=Vector(NV+2,0):
# Malha Temporal
DT:=evalf(TF/NTp):
# Malha Espacial
X[1]:=0: for nv from 1 to NV do X[nv+1]:=evalf(X[nv]+L/NV); od:
# Cálculo das Métricas
for nv from 1 to NV do L[nv]:=evalf(X[nv+1]-X[nv]); od:
# Matrix de Volumes
# Fronteira A
```

```

A[1,1]:=Ka*(L[1]/2/DT+1/L[1])+Ba:
A[1,2]:=Ka*(-1/L[1]):
B[1,1]:=Ka*(L[1]/2/DT):
# Volume Interno
for nv from 2 to NV do
A[nv,nv-1]:=-1/L[nv-1];
A[nv,nv]:=(L[nv-1]+L[nv])/2/DT+1/L[nv-1]+1/L[nv];
A[nv,nv+1]:=-1/L[nv];
B[nv,nv]:=(L[nv-1]+L[nv])/2/DT;
od:
# Fronteira B
A[nv,nv-1]:=Kb*(-1/L[nv-1]):
A[nv,nv]:=Kb*(L[nv-1]/2/DT+1/L[nv-1])+Bb:
B[nv,nv]:=Kb*(L[nv-1]/2/DT):
# Termo Fonte
F[1]:=fo*DTau^m:
A[nv+1,nv+1]:=1:
F[nv+1]:=DTau:
# Características do Problema
KA:=[0,0,0,1,1,1,1,1]:
BA:=[1,1,1,0,0,0,Bi,Bi,Bi]:
KB:=[0,1,1,0,1,1,0,1,1]:
BB:=[1,0,Bi,1,0,Bi,1,0,Bi]:
FO:=[Ta,Ta,Ta,Qa,Qa,Qa,Bi*Ti,Bi*Ti,Bi*Ti]:
MM:=[mt,mt,mt,mf,mf,mf,mc,mc,mc]:
Tr:=Matrix(NV+2,NV+2,0): for np from 2 to NV+2 do Tr[np,np-1]:=1:
od: Tr[1,NV+2]:=1: Tr:
XV:=convert([seq(X[np],np=1..nv),0],Vector):
# Cálculo de Volumes Finitos
for nc from 1 to 9 do
Ka:=KA[nc]:Ba:=BA[nc]:Kb:=KB[nc]:Bb:=BB[nc]:      m:=MM[nc]:
fo:=FO[nc]:
T:=Vector(NV+2,0): U[nc]:=T:
st:=time():
for nt from 1 to NTp do DTau:=nt*DT: print(nc,nt);
T:=MatrixInverse(A).(B.T+F); U[nc]:=<U[nc]|T>: od:
XV[nv+1]:=time()-st:
UM[nc]:=convert(<XV|U[nc]>,Matrix);
nplan1:=nplan+nc:
Export(Tr.UM[nc], cat(Nom,"Geral.xls"), nplan1);
od:

```

```

# Laplace Tempo Longo
restart:gc():with(plots):with(RootFinding): with(ExcelTools):
Nom:="C:\\Transfer\\":
nplan:=9:
Ta:=1: Qa:=1: Ti:=1: Bi:=5: mt:=1: mf:=1: mc:=1:
# Solução Desenvolvida Laplace Tempo Longo
e1:=Sum(fo*tau^m*GAMMA(m+1)*(Kb*lambda[n]*cos((1-x)*lambda[n])+Bb*sin((1-x)*lambda[n]))/((2*Ka*Kb+Ka*Bb+Ba*Kb)*lambda[n]*sin(lambda[n])-(Ba*Bb+Ka*Bb+Ba*Kb-Ka*Kb*lambda[n]^2)*cos(lambda[n]))^2/lambda[n]*(Sum((-lambda[n]^2*tau)^(r-m)/GAMMA(r+1),r=0..m)-exp(-lambda[n]^2*tau)/(-lambda[n]^2*tau)^m),n=1..nf):
e2:=(Ka*Kb*alpha^2-Ba*Bb)*sin(alpha)=(Ka*Bb+Ba*Kb)*alpha*cos(alpha):
KA:=[0,0,0,1,1,1,1,1,1]:
BA:=[1,1,1,0,0,0,Bi,Bi,Bi]:
KB:=[0,1,1,0,1,1,0,1,1]:
BB:=[1,0,Bi,1,0,Bi,1,0,Bi]:
FO:=[Ta,Ta,Ta,Qa,Qa,Qa,Bi*Ti,Bi*Ti,Bi*Ti]:
MM:=[mt,mt,mt,mf,mf,mf,mc,mc,mc]:
TF:=1: NF:=100:
for nc from 1 to 9 do
eq:=subs(Ka=KA[nc],Ba=BA[nc],Kb=KB[nc],Bb=BB[nc],e2):
AV[0]:=0: for nk from 1 to NF do AV[nk]:=fsolve(eq,alpha,AV[nk-1]..AV[nk-1]+2*Pi,avoid={alpha=AV[nk-1]}): od:
LCe[nc]:=evalf(subs(nf=NF,fo=FO[nc],lambda[n]=AV[n],m=MM[nc],Ka=KA[nc],Ba=BA[nc],Kb=KB[nc],Bb=BB[nc],e1)):
od:
LCe[5]:=LCe[5]+int(FO[5]*t^mf,tl=0..tau):
AV[0]:=0: for nk from 1 to NF do AV[nk]:=NextZero(alpha->(alpha^2-Bi^2)*sin(alpha)-2*alpha*Bi*cos(alpha),AV[nk-1]): od: nc:=9:
LCe[nc]:=subs(nf=NF,fo=FO[nc],lambda[n]=AV[n],m=mc,Ka=KA[nc],Ba=BA[nc],Kb=KB[nc],Bb=BB[nc],e1):
# Parâmetros de Malha
L:=1: # Comprimento Característico
NV:=100: # Número de Volumes Espaciais
NTp:=100: # Número de Passos Temporais
# Malha Temporal
DT:=evalf(TF/NTp):
# Malha Espacial

```

```

X[1]:=0: for nv from 1 to NV do X[nv+1]:=evalf(X[nv]+L/NV); od:
XV:=convert([0,seq(X[nv],nv=1..NV+1)],Vector):
for nc from 1 to 9 do
T:=Vector(NV+2,0):
U[nc]:=T:
st:=time():
for nt from 1 to NTP do
T:=Vector([nt*DT,seq(evalf(subs(x=X[nv],tau=nt*DT,LCE[nc])),nv=1..
NV+1))]:
U[nc]:=<U[nc]|T>:
print (nc,nt);
od:
XV[1]:=time()-st:
UM[nc]:=convert(<XV|U[nc]>,Matrix);
nplan1 :=nplan+nc:
Export(UM[nc], cat(Nom,"Geral.xls"), nplan1);
od:
# Laplace Tempo Curto
restart:gc():with(plots):with(RootFinding): with(ExcelTools):
Nom:="C:\\Transfer\\":
nplan:=18:
Ta:=1: Qa:=1: Ti:=1: Bi:=5: mt:=1: mf:=1: mc:=1:
# Solução Desenvolvida Laplace Tempo Curto
LCC[1]:=Ta*GAMMA(mt+1)*(4*tau)^mt*(erfc(2*mt,x/sqrt(4*tau))+S
um((erfc(2*mt,(2*n+x)/sqrt(4*tau))-erfc(2*mt,(2*n-
x)/sqrt(4*tau))),n=1..nf));
LCC[2]:=Ta*GAMMA(mt+1)*(4*tau)^mt*(erfc(2*mt,x/sqrt(4*tau))+S
um((-1)^n*(erfc(2*mt,(2*n+x)/sqrt(4*tau))-erfc(2*mt,(2*n-
x)/sqrt(4*tau))),n=1..nf));
LCC[3]:=Ta*GAMMA(mt+1)*(4*tau)^mt*(erfc(2*mt,x/sqrt(4*tau))+S
um((-1)^n*(erfc(2*mt,(2*n+x)/sqrt(4*tau))-erfc(2*mt,(2*n-
x)/sqrt(4*tau))),n=1..nf))+Ta*GAMMA(mt+1)*Sum(Sum((-
1)^n*GAMMA(n+1)*(-2*Bi)^(k+1)/GAMMA(k+2)/GAMMA(n-
k)*(Sum((-1)^(j+1)*GAMMA(2*mt+j+1)*sqrt(4*tau)^(k-
j)/GAMMA(2*mt+1)/GAMMA(j+1))/(-
Bi)^(2*mt+j+1)*(Sum(GAMMA(r+k-j+1)/GAMMA(k-
j+1)/GAMMA(r+1)*(-2*Bi*sqrt(tau))^r*erfc(r+k-
j,(2*n+x)/sqrt(4*tau)),r=0..2*mt+j)-exp(Bi*(2*n+x)+Bi^2*tau)*erfc(k-
j,((2*n+x)/sqrt(4*tau)+Bi*sqrt(tau))))),j=0..k)-Sum((-
1)^(j+1)*GAMMA(2*mt+j+1)*sqrt(4*tau)^(k-
j)/GAMMA(2*mt+1)/GAMMA(j+1))/(-

```



$$\begin{aligned}
& \text{Bi}^{\wedge}(2^* \text{mt} + \text{j} + 1) * (\text{Sum}(\text{GAMMA}(\text{r} + \text{k} - \text{j} + 1) / \text{GAMMA}(\text{k} - \\
& \text{j} + 1) / \text{GAMMA}(\text{r} + 1) * (-2^* \text{Bi}^* \text{sqrt}(\text{tau}))^{\wedge} \text{r} * \text{erfc}(\text{r} + \text{k} - \text{j}, (2^* \text{n} - \\
& \text{x}) / \text{sqrt}(4^* \text{tau})), \text{r} = 0..2^* \text{mt} + \text{j}) - \text{exp}(\text{Bi}^* (2^* \text{n} - \text{x}) + \text{Bi}^{\wedge} 2^* \text{tau}) * \text{erfc}(\text{k} - \text{j}, ((2^* \text{n} - \\
& \text{x}) / \text{sqrt}(4^* \text{tau}) + \text{Bi}^* \text{sqrt}(\text{tau}))), \text{j} = 0.. \text{k}), \text{k} = 0.. \text{n} - 1), \text{n} = 1.. \text{nf}); \\
\text{LCC}[4] := & \text{Qa}^* \text{GAMMA}(\text{mf} + 1) * (4^* \text{tau})^{\wedge} (\text{mf} + 1/2) * (\text{erfc}(2^* \text{mf} + 1, \text{x} / \text{sqrt}(4^* \\
& \text{tau})) + \text{Sum}((- \\
& 1)^{\wedge} \text{n} * (\text{erfc}(2^* \text{mf} + 1, (2^* \text{n} + \text{x}) / \text{sqrt}(4^* \text{tau})) + \text{erfc}(2^* \text{mf} + 1, (2^* \text{n} - \\
& \text{x}) / \text{sqrt}(4^* \text{tau}))), \text{n} = 1.. \text{nf})); \\
\text{LCC}[5] := & \text{Qa}^* \text{GAMMA}(\text{mf} + 1) * (4^* \text{tau})^{\wedge} (\text{mf} + 1/2) * (\text{erfc}(2^* \text{mf} + 1, \text{x} / \text{sqrt}(4^* \\
& \text{tau})) + \text{Sum}((\text{erfc}(2^* \text{mf} + 1, (2^* \text{n} + \text{x}) / \text{sqrt}(4^* \text{tau})) + \text{erfc}(2^* \text{mf} + 1, (2^* \text{n} - \\
& \text{x}) / \text{sqrt}(4^* \text{tau}))), \text{n} = 1.. \text{nf})); \\
\text{LCC}[6] := & \text{Qa}^* \text{GAMMA}(\text{mf} + 1) * (4^* \text{tau})^{\wedge} (\text{mf} + 1/2) * (\text{erfc}(2^* \text{mf} + 1, \text{x} / \text{sqrt}(4^* \\
& \text{tau})) + \text{Sum}((\text{erfc}(2^* \text{mf} + 1, (2^* \text{n} + \text{x}) / \text{sqrt}(4^* \text{tau})) + \text{erfc}(2^* \text{mf} + 1, (2^* \text{n} - \\
& \text{x}) / \text{sqrt}(4^* \text{tau}))), \text{n} = 1.. \text{nf})) + \text{Qa}^* \text{GAMMA}(\text{mf} + 1) * \text{Sum}(\text{Sum}(\text{GAMMA}(\text{n} + \\
& 1) * (-2^* \text{Bi})^{\wedge} (\text{k} + 1) / \text{GAMMA}(\text{k} + 2) / \text{GAMMA}(\text{n} - \text{k}) * (\text{Sum}((- \\
& 1)^{\wedge} (\text{j} + 1) * \text{GAMMA}(2^* \text{mf} + 1 + \text{j} + 1) * \text{sqrt}(4^* \text{tau})^{\wedge} (\text{k} - \\
& \text{j}) / \text{GAMMA}(2^* \text{mf} + 1 + 1) / \text{GAMMA}(\text{j} + 1)) / (- \\
& \text{Bi})^{\wedge} (2^* \text{mf} + 1 + \text{j} + 1) * (\text{Sum}(\text{GAMMA}(\text{r} + \text{k} - \text{j} + 1) / \text{GAMMA}(\text{k} - \\
& \text{j} + 1) / \text{GAMMA}(\text{r} + 1) * (-2^* \text{Bi}^* \text{sqrt}(\text{tau}))^{\wedge} \text{r} * \text{erfc}(\text{r} + \text{k} - \\
& \text{j}, (2^* \text{n} + \text{x}) / \text{sqrt}(4^* \text{tau})), \text{r} = 0..2^* \text{mf} + 1 + \text{j}) - \\
& \text{exp}(\text{Bi}^* (2^* \text{n} + \text{x}) + \text{Bi}^{\wedge} 2^* \text{tau}) * \text{erfc}(\text{k} - \\
& \text{j}, ((2^* \text{n} + \text{x}) / \text{sqrt}(4^* \text{tau}) + \text{Bi}^* \text{sqrt}(\text{tau}))), \text{j} = 0.. \text{k}) + \text{Sum}((- \\
& 1)^{\wedge} (\text{j} + 1) * \text{GAMMA}(2^* \text{mf} + 1 + \text{j} + 1) * \text{sqrt}(4^* \text{tau})^{\wedge} (\text{k} - \\
& \text{j}) / \text{GAMMA}(2^* \text{mf} + 1 + 1) / \text{GAMMA}(\text{j} + 1)) / (- \\
& \text{Bi})^{\wedge} (2^* \text{mf} + 1 + \text{j} + 1) * (\text{Sum}(\text{GAMMA}(\text{r} + \text{k} - \text{j} + 1) / \text{GAMMA}(\text{k} - \\
& \text{j} + 1) / \text{GAMMA}(\text{r} + 1) * (-2^* \text{Bi}^* \text{sqrt}(\text{tau}))^{\wedge} \text{r} * \text{erfc}(\text{r} + \text{k} - \text{j}, (2^* \text{n} - \\
& \text{x}) / \text{sqrt}(4^* \text{tau})), \text{r} = 0..2^* \text{mf} + 1 + \text{j}) - \text{exp}(\text{Bi}^* (2^* \text{n} - \text{x}) + \text{Bi}^{\wedge} 2^* \text{tau}) * \text{erfc}(\text{k} - \\
& \text{j}, ((2^* \text{n} - \text{x}) / \text{sqrt}(4^* \text{tau}) + \text{Bi}^* \text{sqrt}(\text{tau}))), \text{j} = 0.. \text{k}), \text{k} = 0.. \text{n} - 1), \text{n} = 1.. \text{nf}); \\
\text{LCC}[7] := & \text{Bi}^* \text{Ti}^* \text{GAMMA}(\text{mc} + 1) * (1 / (- \\
& \text{Bi})^{\wedge} (2^* \text{mc} + 1) * (\text{exp}(\text{Bi}^* \text{x} + \text{Bi}^{\wedge} 2^* \text{tau}) * \text{erfc}(\text{x} / \text{sqrt}(4^* \text{tau}) + \text{Bi}^* \text{sqrt}(\text{tau})) - \\
& \text{sum}((- \\
& \text{Bi}^* \text{sqrt}(4^* \text{tau}))^{\wedge} \text{r} * \text{erfc}(\text{r}, \text{x} / \text{sqrt}(4^* \text{tau})), \text{r} = 0..2^* \text{mc} + 0)) + \text{Sum}(\text{Sum}((- \\
& 1)^{\wedge} \text{n} * \text{GAMMA}(\text{n} + 1) * (-2^* \text{Bi})^{\wedge} \text{k} / \text{GAMMA}(\text{k} + 1) / \text{GAMMA}(\text{n} - \\
& \text{k} + 1) * \text{Sum}((( - 1)^{\wedge} \text{j} * \text{GAMMA}(2^* \text{mc} + \text{j} + 1) * \text{sqrt}(4^* \text{tau})^{\wedge} (\text{k} - \\
& \text{j}) / \text{GAMMA}(2^* \text{mc} + 1) / \text{GAMMA}(\text{j} + 1)) / (- \\
& \text{Bi})^{\wedge} (2^* \text{mc} + \text{j} + 1)) * (\text{exp}(\text{Bi}^* (2^* \text{n} + \text{x}) + \text{Bi}^{\wedge} 2^* \text{tau}) * \text{erfc}(\text{k} - \\
& \text{j}, (2^* \text{n} + \text{x}) / \text{sqrt}(4^* \text{tau}) + \text{Bi}^* \text{sqrt}(\text{tau})) - \text{sum}((- \\
& \text{Bi}^* \text{sqrt}(4^* \text{tau}))^{\wedge} \text{r} * \text{GAMMA}(\text{k} - \text{j} + \text{r} + 1) / \text{GAMMA}(\text{r} + 1) / \text{GAMMA}(\text{k} - \\
& \text{j} + 1) * \text{erfc}(\text{k} - \\
& \text{j} + \text{r}, (2^* \text{n} + \text{x}) / \text{sqrt}(4^* \text{tau})), \text{r} = 0..2^* \text{mc} + \text{j}), \text{j} = 0.. \text{k}), \text{k} = 0.. \text{n}), \text{n} = 1.. \text{nf}) + \text{Sum}(\text{Su} \\
& \text{m}((- 1)^{\wedge} \text{n} * \text{GAMMA}(\text{n}) * (-2^* \text{Bi})^{\wedge} \text{k} / \text{GAMMA}(\text{k} + 1) / \text{GAMMA}(\text{n} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k) * \text{Sum}((( -1)^j * \text{GAMMA}(2 * mc + j + 1) * \text{sqrt}(4 * \tau))^k - \\
& j) / \text{GAMMA}(2 * mc + 1) / \text{GAMMA}(j + 1) / (-Bi)^{(2 * mc + j + 1)}) * (\exp(Bi * (2 * n - \\
& x) + Bi^2 * \tau) * \text{erfc}(k - j, (2 * n - x) / \text{sqrt}(4 * \tau) + Bi * \text{sqrt}(\tau)) - \text{sum}((- \\
& Bi * \text{sqrt}(4 * \tau))^r * \text{GAMMA}(k - j + r + 1) / \text{GAMMA}(r + 1) / \text{GAMMA}(k - \\
& j + 1) * \text{erfc}(k - j + r, (2 * n - x) / \text{sqrt}(4 * \tau))), r = 0..2 * mc + j), j = 0..k, k = 0..n - \\
& 1), n = 1..nf); \\
\text{LCC}[8] := & Bi * Ti * \text{GAMMA}(mc + 1) * (1 / (- \\
& Bi)^{(2 * mc + 1)} * (\exp(Bi * x + Bi^2 * \tau) * \text{erfc}(x / \text{sqrt}(4 * \tau) + Bi * \text{sqrt}(\tau)) - \\
& \text{sum}((- \\
& Bi * \text{sqrt}(4 * \tau))^r * \text{erfc}(r, x / \text{sqrt}(4 * \tau))), r = 0..2 * mc + 0)) + \text{Sum}(\text{Sum}(\text{GAM} \\
& \text{MA}(n + 1) * (-2 * Bi)^k / \text{GAMMA}(k + 1) / \text{GAMMA}(n - k + 1) * \text{Sum}((( - \\
& 1)^j * \text{GAMMA}(2 * mc + j + 1) * \text{sqrt}(4 * \tau))^k - \\
& j) / \text{GAMMA}(2 * mc + 1) / \text{GAMMA}(j + 1) / (- \\
& Bi)^{(2 * mc + j + 1)}) * (\exp(Bi * (2 * n + x) + Bi^2 * \tau) * \text{erfc}(k - \\
& j, (2 * n + x) / \text{sqrt}(4 * \tau) + Bi * \text{sqrt}(\tau)) - \text{sum}((- \\
& Bi * \text{sqrt}(4 * \tau))^r * \text{GAMMA}(k - j + r + 1) / \text{GAMMA}(r + 1) / \text{GAMMA}(k - \\
& j + 1) * \text{erfc}(k - \\
& j + r, (2 * n + x) / \text{sqrt}(4 * \tau))), r = 0..2 * mc + j), j = 0..k, k = 0..n), n = 1..nf) + \text{Sum}(\text{Su} \\
& \text{m}(\text{GAMMA}(n) * (-2 * Bi)^k / \text{GAMMA}(k + 1) / \text{GAMMA}(n - k) * \text{Sum}((( - \\
& 1)^j * \text{GAMMA}(2 * mc + j + 1) * \text{sqrt}(4 * \tau))^k - \\
& j) / \text{GAMMA}(2 * mc + 1) / \text{GAMMA}(j + 1) / (-Bi)^{(2 * mc + j + 1)}) * (\exp(Bi * (2 * n - \\
& x) + Bi^2 * \tau) * \text{erfc}(k - j, (2 * n - x) / \text{sqrt}(4 * \tau) + Bi * \text{sqrt}(\tau)) - \text{sum}((- \\
& Bi * \text{sqrt}(4 * \tau))^r * \text{GAMMA}(k - j + r + 1) / \text{GAMMA}(r + 1) / \text{GAMMA}(k - \\
& j + 1) * \text{erfc}(k - j + r, (2 * n - x) / \text{sqrt}(4 * \tau))), r = 0..2 * mc + j), j = 0..k, k = 0..n - \\
& 1), n = 1..nf); \\
\text{LCC}[9] := & Bi * Ti * \text{GAMMA}(mc + 1) * (1 / (- \\
& Bi)^{(2 * mc + 1)} * (\exp(Bi * x + Bi^2 * \tau) * \text{erfc}(x / \text{sqrt}(4 * \tau) + Bi * \text{sqrt}(\tau)) - \\
& \text{sum}((- \\
& Bi * \text{sqrt}(4 * \tau))^r * \text{erfc}(r, x / \text{sqrt}(4 * \tau))), r = 0..2 * mc + 0)) + \text{Sum}(\text{Sum}(\text{GAM} \\
& \text{MA}(2 * n + 1) * (-2 * Bi)^k / \text{GAMMA}(k + 1) / \text{GAMMA}(2 * n - k + 1) * \text{Sum}((( - \\
& 1)^j * \text{GAMMA}(2 * mc + j + 1) * \text{sqrt}(4 * \tau))^k - \\
& j) / \text{GAMMA}(2 * mc + 1) / \text{GAMMA}(j + 1) / (- \\
& Bi)^{(2 * mc + j + 1)}) * (\exp(Bi * (2 * n + x) + Bi^2 * \tau) * \text{erfc}(k - \\
& j, (2 * n + x) / \text{sqrt}(4 * \tau) + Bi * \text{sqrt}(\tau)) - \text{sum}((- \\
& Bi * \text{sqrt}(4 * \tau))^r * \text{GAMMA}(k - j + r + 1) / \text{GAMMA}(r + 1) / \text{GAMMA}(k - \\
& j + 1) * \text{erfc}(k - \\
& j + r, (2 * n + x) / \text{sqrt}(4 * \tau))), r = 0..2 * mc + j), j = 0..k, k = 0..2 * n), n = 1..nf) + \text{Sum}(\text{Sum}(\text{GAM} \\
& \text{MA}(2 * n) * (-2 * Bi)^k / \text{GAMMA}(k + 1) / \text{GAMMA}(2 * n - \\
& k) * \text{Sum}((( -1)^j * \text{GAMMA}(2 * mc + j + 1) * \text{sqrt}(4 * \tau))^k - \\
& j) / \text{GAMMA}(2 * mc + 1) / \text{GAMMA}(j + 1) / (-Bi)^{(2 * mc + j + 1)}) * (\exp(Bi * (2 * n - \\
& x) + Bi^2 * \tau) * \text{erfc}(k - j, (2 * n - x) / \text{sqrt}(4 * \tau) + Bi * \text{sqrt}(\tau)) - \text{sum}((-
\end{aligned}$$

```

Bi*sqrt(4*tau)^r*GAMMA(k-j+r+1)/GAMMA(r+1)/GAMMA(k-
j+1)*erfc(k-j+r,(2*n-x)/sqrt(4*tau)),r=0..2*mc+j)),j=0..k,k=0..2*n-
1),n=1..nf);
TF:=1: NF:=2:
# Parâmetros de Malha
L:=1: # Comprimento Característico
NV:=100: # Número de Volumes Espaciais
NTp:=100: # Número de Passos Temporais
# Malha Temporal
DT:=evalf(TF/NTp):
# Malha Espacial
X[1]:=0: for np from 1 to NV do X[np+1]:=evalf(X[np]+L/NV); od:
XV:=convert([0,seq(X[np],np=1..NV+1)],Vector):
for nc from 1 to 9 do
LCC[nc]:=evalf(subs(nf=NF,LCC[nc]]):
T:=Vector(NV+2,0):
U[nc]:=T:
st:=time():
for nt from 1 to NTp do
T:=Vector([nt*DT,seq(evalf(subs(x=X[nv],tau=nt*DT,LCC[nc])),nv=1..
NV+1))]:
U[nc]:=<U[nc]|T>:
print(nc,nt);
od:
XV[1]:=time()-st:
UM[nc]:=convert(<XV|U[nc]>,Matrix);
nplan1:=nplan+nc:
Export(UM[nc], cat(Nom,"Geral.xls"), nplan1);
od:
# HBIM Tempo Longo
restart:gc():with(plots):with(RootFinding): with(ExcelTools):
alias(W=LambertW):
Nom:="C:\\Transfer\\":
nplan:=27:
Ta:=1: Qa:=1: Ti:=1: Bi:=5: mt:=1: mf:=1: mc:=1:
# Solução Desenvolvida HBIM Tempo Longo
K1:=(2*Kb+Bb)*(n*Ka+Ba)*(n+1)/2-(Ka*Bb+Ba*Bb+Ba*Kb):
K2:=(Ka*Bb+Ba*Bb+Ba*Kb)*n*(n+1):
K3:=n*(n+1):
f:=(tl)->fo*tl^m:
e1:=K1*diff(phi0(tau),tau)+K2*phi0(tau)=K3*f(tau)-diff(f(tau),tau):

```

```

e2:=f(tau)/(n*Ka+Ba)*(1-x)^n+phi0(tau)*(Bb*(1-x)+Kb-
(Ka*Bb+Ba*Bb+Ba*Kb)/(n*Ka+Ba)*(1-x)^n):
e3:=f(tau)*d(tau)/n/(Ka+Ba*d(tau)/n)*(1-x/d(tau))^n:
e4:=m/tau*d(tau)^2+d iff(d(tau)^2,tau)-
Ba*d(tau)*diff(d(tau)^2,tau)/(2*(n*Ka+Ba*d(tau)))-n*(n+1)=0:
KA:=[0,0,0,1,1,1,1,1,1]:
BA:=[1,1,1,0,0,0,Bi,Bi,Bi]:
KB:=[0,1,1,0,1,1,0,1,1]:
BB:=[1,0,Bi,1,0,Bi,1,0,Bi]:
FO:=[Ta,Ta,Ta,Qa,Qa,Qa,Bi*Ti,Bi*Ti,Bi*Ti]:
NN:=[nt,nt,nt,nf,nf,nf,ncv,ncv,ncv]:
MM:=[mt,mt,mt,mf,mf,mf,mc,mc,mc]:
TO:=[Tt,Tt,Tt,Tf,Tf,Tf,Tc,Tc,Tc]:
TF:=1:
phi:=Bi^2*tau*(exp(Bi^2*tau)*erfc(Bi*sqrt(tau))-sum((-
Bi*sqrt(tau))^r/GAMMA(r/2+1),r=0..2*mc-
1))/(exp(Bi^2*tau)*erfc(Bi*sqrt(tau))-sum((-
Bi*sqrt(tau))^r/GAMMA(r/2+1),r=0..2*mc+1)):
nt:=evalf(1/((mt+1/2)*(GAMMA(mt+1/2)/GAMMA(mt+1))^2-1));
nf:=evalf(1/((mf+1)*(GAMMA(mf+1)/GAMMA(mf+3/2))^2-1));
ncv:=evalf(1/((phi)*(GAMMA(phi)/GAMMA(phi+1/2))^2-1));
Tt:=evalf((GAMMA(mt+1)/GAMMA(mt+1/2)/nt)^2);
Tc:=fsolve(GAMMA(phi)*GAMMA(phi+1/2)/(phi*GAMMA(phi)^2-
GAMMA(phi+1/2)^2)*sqrt(tau)-1,tau);
Tf:=evalf((GAMMA(mf+3/2)/GAMMA(mf+1)/nf)^2);
for nc from 1 to 3 do
s1[nc]:=d(tau)=sqrt(nt*(nt+1)*tau/(mt+1/2));
T1[nc]:=piecewise(x<=rhs(s1[nc]),evalf(subs(s1[nc],Ka=KA[nc],Ba=BA
A[nc],Kb=KB[nc],Bb=BB[nc],fo=FO[nc],m=MM[nc],n=NN[nc],e3)),0)
:
s2[nc]:=evalf(dsolve({subs(Ka=KA[nc],Ba=BA[nc],Kb=KB[nc],Bb=BB
B[nc],fo=FO[nc],m=MM[nc],n=NN[nc],e1),phi0(TO[nc])=0},phi0(tau))
):
T2[nc]:=subs(s2[nc],Ka=KA[nc],Ba=BA[nc],Kb=KB[nc],Bb=BB[nc],f
o=FO[nc],m=MM[nc],n=NN[nc],e2):
HBIM[nc]:=piecewise(tau<TO[nc],T1[nc],T2[nc]);
od:
for nc from 4 to 6 do
s1[nc]:=d(tau)=sqrt(nf*(nf+1)*tau/(mf+1));

```

```

T1[nc]:=piecewise(x<=rhs(s1[nc]),evalf(subs(s1[nc],Ka=KA[nc],Ba=BA[nc],Kb=KB[nc],Bb=BB[nc],fo=FO[nc],m=MM[nc],n=NN[nc],e3)),0)
:
s2[nc]:=evalf(dsolve({subs(Ka=KA[nc],Ba=BA[nc],Kb=KB[nc],Bb=BB[nc],fo=FO[nc],m=MM[nc],n=NN[nc],e1),phi0(TO[nc])=0},phi0(tau)))
:
T2[nc]:=subs(s2[nc],Ka=KA[nc],Ba=BA[nc],Kb=KB[nc],Bb=BB[nc],fo=FO[nc],m=MM[nc],n=NN[nc],e2):
HBIM[nc]:=piecewise(tau<TO[nc],T1[nc],T2[nc]);
od:
for nc from 7 to 9 do
s1[nc]:=d(tau)=GAMMA(phi)*GAMMA(phi+1/2)/(phi*GAMMA(phi)^2-GAMMA(phi+1/2)^2)*sqrt(tau);
T1[nc]:=piecewise(x<=rhs(s1[nc]),evalf(subs(s1[nc],Ka=KA[nc],Ba=BA[nc],Kb=KB[nc],Bb=BB[nc],fo=FO[nc],m=MM[nc],n=NN[nc],e3)),0)
;
s2[nc]:=evalf(dsolve({subs(Ka=KA[nc],Ba=BA[nc],Kb=KB[nc],Bb=BB[nc],fo=FO[nc],m=MM[nc],n=evalf(subs(tau=TO[nc],NN[nc])),e1),phi0(TO[nc])=0},phi0(tau)))
:
T2[nc]:=subs(s2[nc],Ka=KA[nc],Ba=BA[nc],Kb=KB[nc],Bb=BB[nc],fo=FO[nc],m=MM[nc],n=NN[nc],e2):
HBIM[nc]:=piecewise(tau<TO[nc],T1[nc],T2[nc]):
od:
# Parâmetros de Malha
L:=1: # Comprimento Característico
NV:=100: # Número de Volumes Espaciais
NTp:=100: # Número de Passos Temporais
# Malha Temporal
DT:=evalf(TF/NTp):
# Malha Espacial
X[1]:=0: for nv from 1 to NV do X[nv+1]:=evalf(X[nv]+L/NV); od:
XV:=convert([0,seq(X[nv],nv=1..nv)],Vector):
for nc from 1 to 9 do
st:=time():
T:=Vector(NV+2,0):
U[nc]:=T:
for nt from 1 to NTp do
T:=Vector([nt*DT,seq(evalf(subs(x=X[nv],tau=nt*DT,HBIM[nc])),nv=1..NV+1)]):
U[nc]:=<U[nc]|T>:
print(nc,nt);

```

```
od:  
XV[1]:=time()-st:  
UM[nc]:=convert(<XV|U[nc]>,Matrix);  
nplan1:=nplan+nc:  
Export(UM[nc], cat(Nom,"Geral.xls"), nplan1);  
od:
```

## APÊNDICE C – CÓDIGO INVERSO DESENVOLVIDO

Neste anexo é apresentado um dos dois principais códigos desenvolvidos para a realização das simulações que foram analisadas e comparadas no presente trabalho. O código não está documentado ou comentado por terem sido de uso exclusivo do programador.

O código de solução inversa possui implementada a rotina de solução do método comparado no capítulo 5 da presente tese, isto é, HBIM para a situação de pulso. As soluções estão implementadas em formatos modulares comunicantes, mas mesmo assim são necessárias modificações no interior do código para alteração das variáveis de interesse.

Para a rotina de Gradiente Conjugado (CG) define-se um número máximo de iterações  $i_{\max}$  para o laço externo do GC e uma tolerância de erro global ao GC ( $\varepsilon < 1$ ), um número máximo de iterações para o laço de cálculo de Newton-Raphson,  $j_{\max}$ , uma tolerância de erro para o laço de cálculo de Newton-Raphson ( $\gamma < 1$ ) e um número máximo de iterações lineares  $k_{\max}$ , isto é, o número de iterações antes de recalculer os coeficientes não-lineares do problema. Com isso, o algoritmo do GC pode ser expresso da seguinte forma:

### → Etapa de inicialização do método

1. Inicialização dos contadores ( $i=0$  e  $k=0$ ), onde  $i$  é o contador de iterações global e  $k$  é o contador de iterações lineares.
2. Define-se o vetor  $\vec{r}$  como o gradiente negativo da função  $Q$  em relação ao espaço vetorial  $\vec{P}$ .
3. Define-se a matriz  $IM$  como a inversa da diagonal da matriz da segunda derivada da função  $Q$  no espaço  $\vec{P}$ .
4. Define-se  $\vec{s}$  como o produto escalar entre  $IM$  e  $\vec{r}$ .
5. Iguala-se  $\vec{d}$ , direção de busca do mínimo, com  $\vec{s}$ .
6. Inicializa-se os escalares  $\delta_0$  e  $\delta_N$  como sendo o produto escalar entre  $\vec{r}^T$  e  $\vec{d}$ .

### → Laço Externo: Enquanto $i \leq i_{\max}$ e $\delta_N > \varepsilon^2 \delta_0$

1. Inicialização do contador ( $j=0$ ), onde  $j$  é o contador de iterações de Newton-Raphson.

2. Calcula-se o raio máximo de variação do parâmetro,  $\delta_d$ , através do produto escalar  $\vec{d}^T$  e  $\vec{d}$ .

➔ **Lço Interno** (Newton-Raphson): Enquanto  $j \leq j_{\max}$  e  $\alpha^2 \delta_d > \gamma^2$

1. Calcula-se o avanço do vetor  $\vec{P}$  na direção  $\vec{d}$ ,  $\alpha$ , pela expressão:

$$\alpha = -\frac{[Q'(\vec{P})]^T \cdot \vec{d}}{\vec{d}^T \cdot [Q''(\vec{P})] \cdot \vec{d}}$$

2. Atualiza-se o vetor  $\vec{P}$  pela fórmula  $\vec{P} = \vec{P} + \alpha \vec{d}$ .

3. Avança-se o contador  $j$ .

4. Verificam-se as condições do laço interno. Se forem atendidas retorna-se ao passo 1 do laço interno, caso contrário encerra-se o laço interno.

➔ **Fim do Lço Interno**

3. Recalcula-se o vetor  $\vec{r}$  com o mais recente valor de  $\vec{P}$ .

4. Faz-se  $\delta_O = \delta_N$ .

5. Calcula-se o escalar  $\delta_M$  com o produto escalar de  $\vec{r}^T$  e  $\vec{s}$ .

6. Recalcula-se  $IM$  e, em seguida, um novo valor de  $\vec{s}$ .

7. Calcula-se o escalar  $\delta_N$  com o produto escalar de  $\vec{r}^T$  e  $\vec{s}$ .

8. Calcula-se o escalar  $\beta$  como sendo  $\frac{\delta_N - \delta_M}{\delta_O}$ .

9. Avança-se o contador  $k$ .

10. Avalia-se, caso o contado  $k$  seja igual a  $k_{\max}$  ou o valor de  $\beta$  seja negativo atribui-se novamente a direção de busca,  $\vec{d}$ , igual a  $\vec{s}$  e zera-se o contador  $k$ ; caso contrário, determina-se a nova direção pela expressão  $\vec{d} = \vec{s} + \beta \vec{d}$ .

11. Avança-se o contador  $i$  e verificam-se as condições do laço externo. Se forem atendidas retorna-se ao passo 1 do laço externo, caso contrário encerra-se o laço externo e o programa.

➔ **Fim do Lço Externo**



Importante observar que a forma de obter o parâmetro  $\beta$  utilizada nesse caso foi com o algoritmo de Polak-Ribière. Essa forma, levando em consideração as variáveis  $\delta_N$ ,  $\delta_M$  e  $\delta_O$ , é mais conservativa, isto significa que o avanço é mais lento, mas também é mais consistente, diminuindo o risco que o processo divirja.

Outro fator muito importante a se chamar atenção nesse algoritmo é que foi utilizada a matriz  $IM$  como a inversa da pré-condicionadora, é muito importante que essa matriz possua uma diagonal principal dominante e positiva para garantir estabilidade do processo iterativo. Para que isso ocorra, a escolha da matriz pré-condicionadora é muito importante. No presente caso arbitrou-se por usar uma matriz composta apenas pela diagonal principal da Hessiana (matriz composta pelas segundas derivadas da função  $Q$  no espaço  $\bar{P}$ ) como pré-condicionadora. Mas, como essas derivadas dependem do valor de  $\bar{P}$ , é crucial verificar se o valor inicial,  $\bar{P}_0$ , faz com que a Hessiana atenda essa necessidade.

Após os cálculos iterativos do GC vários gráficos de pós-processamento, tais como o histórico de convergência dos parâmetros e os perfis de temperatura e fluxo, são gerados e o cálculo dos limites de confiabilidade são realizados. Esses limites são calculados a partir da obtenção das matrizes de covariância. Os limites de confiabilidade de cada parâmetro podem ser relacionados aos limites dos demais parâmetros obtendo-se uma superfície de  $n$  dimensões que formariam a fronteira de um volume  $n$  dimensional de confiabilidade. Como não é possível visualizar todas as interações simultaneamente preferiu-se fazê-lo de duas-em-duas. Nesse caso a área formada pela iteração dos limites de confiabilidade de dois parâmetros é uma elipse.

#### CÓDIGO FONTE DO PROGRAMA DE SOLUÇÃO INVERSA EM MAPLE

```
> restart;gc():with(plots):with(LinearAlgebra):with(ArrayTools):
with(Statistics):
> ne:=GAMMA(phi+1/2)^2/(phi*GAMMA(phi)^2-
GAMMA(phi+1/2)^2):
> delta:=GAMMA(phi)*GAMMA(phi+1/2)/(phi*GAMMA(phi)^2-
GAMMA(phi+1/2)^2)*sqrt(t):
> Phi:=fo*t^m*(GAMMA(phi)*sqrt(t)/(K*GAMMA(phi+1/2)+
B*GAMMA(phi)*sqrt(t))):
```

```

> Real:=evalf(subs(fo=1,m=0,alf=1,ti=0,subs(K=1,B=0,phi=m+1,
piecewise(t>ti,subs(t=alf*(t-ti),piecewise(x<=delta,Phi*(1-
x/delta)^ne,0)),t<=ti,0))) + subs(fo=-1,m=0,alf=1,ti=0.025001,
subs(K=1,B=0,phi=m+1, piecewise(t>ti,subs(t=alf*(t-
ti),piecewise(x<=delta,Phi*(1-x/delta)^ne,0)),t<=ti,0)))));
> dp:=2e-3:
> nxm:=3:
> XL:=[0.1,0.2,0.3]:
> ntm:=100:
> TF:=0.1:
> im:=90:
> jm:=20:
> Ruído:=Sample(RandomVariable(Normal(0,dp)),ntm*nxm):
> # Criação dos Dados Experimentais
> for nx from 1 to nxm do
for nt from 1 to ntm do
x[(nx-1)*ntm+nt]:=XL[nx];
t[(nx-1)*ntm+nt]:=evalf(nt/ntm*TF);
Y[(nx-1)*ntm+nt]:=evalf(subs(x=x[(nx-1)*ntm+nt],t=t[(nx-
1)*ntm+nt],Real)+Ruído[(nx-1)*ntm+nt]);
sigma[(nx-1)*ntm+nt]:=dp;
od;
od;
> Cx:=[red,blue,black]:
> for kx from 1 to nxm do
EP[kx]:=ErrorPlot([seq(seq(Y[(nx-
1)*ntm+nt],nt=1..ntm),nx=kx)],xcoords=[seq(seq(t[(nx-
1)*ntm+nt],nt=1..ntm),nx=kx)],yerrors=[seq(seq(sigma[(nx-
1)*ntm+nt],nt=1..ntm),nx=kx)],color=Cx[kx]):
od;
> display(EP[1],EP[2],EP[3]);
> XP:=Vector(XL);
> DP:=Matrix([seq([seq(Y[(nx-1)*ntm+nt],nt=1..ntm)],nx=1..nxm)]);
> Tempo:=Vector([seq(seq(t[(nx-1)*ntm+nt],nt=1..ntm),nx=1)]);
> jm:=100:
> plot([seq([seq([Tempo[j],DP[i][j]],j=1..jm)],i=1..nxm)]);
> So:=dp;
> i:=0:
for j from 1 to jm by 1 do
i:=i+1:
Y[i]:=DP[1][j];

```

```

X[i]:=XL[1];
tau[i]:=Tempo[j];
od:
JM:=i;
> for j from 1 to jm by 1 do
i:=i+1:
Y[i]:=DP[2][j];
X[i]:=XL[2];
tau[i]:=Tempo[j];
od:
JM:=i;
> i:=0:
for j from 1 to jm by 1 do
i:=i+1:
YN[i]:=DP[3][j];
XN[i]:=XL[3];
od:
> sigma:=seq(So,j=1..JM):
> EL:=plot([[seq([tau[j],Y[j]],j=1..JM/2)],
[seq([tau[j],Y[j]],j=JM/2+1..JM)]],color=blue):
> EP:=ErrorPlot([seq(Y[j],j=1..JM)],xcoords=[seq(tau[j],j=1..JM)],
yerrors=[seq(sigma[j],j=1..JM)],color=[red]):
> display(EP,EL);
> # Base HBIM
ne:=GAMMA(phi+1/2)^2/(phi*GAMMA(phi)^2-
GAMMA(phi+1/2)^2):
delta:=GAMMA(phi)*GAMMA(phi+1/2)/(phi*GAMMA(phi)^2-
GAMMA(phi+1/2)^2)*sqrt(t):
Phi:=fo*t^m*(GAMMA(phi)*sqrt(t)/(K*GAMMA(phi+1/2)+
B*GAMMA(phi)*sqrt(t))):
> # Modelo
FE:=[10^0,10^0,10^0,10^0,10^0,10^0]:
Modelo:=(p1,p2,p3,p4,p5,p6)->
subs(fo=p1*FE[1],m=p3*FE[3],ti=0,
piecewise(t>ti,subs(t=p6*FE[6]*(t-ti),subs(K=1,B=0,phi=m+1,
piecewise(x<delta,Phi*(1-x/delta)^ne,0))),0))+
subs(fo=p2*FE[2],m=p4*FE[4],ti=p5*FE[5],
piecewise(t>ti,subs(t=p6*FE[6]*(t-ti),subs(K=1,B=0,phi=m+1,
piecewise(x<delta,Phi*(1-x/delta)^ne,0))),0)):
> # Método dos Mínimos Quadrados (Função Objetivo)

```

```

> Q:=Sum((Y[ip]-
subs(x=X[ip],t=tau[ip],Modelo(p1,p2,p3,p4,p5,p6)))^2/sigma[ip]^2,ip=
1..JM):
> # Jacobiano
>
J:=Vector([diff(Q,p1),diff(Q,p2),diff(Q,p3),diff(Q,p4),diff(Q,p5),diff(Q,
p6)]):
> # Hessiano
> H:=Matrix([
[diff(Q,p1,p1),diff(Q,p1,p2),diff(Q,p1,p3),diff(Q,p1,p4),diff(Q,p1,p5),di
ff(Q,p1,p6)],
[diff(Q,p2,p1),diff(Q,p2,p2),diff(Q,p2,p3),diff(Q,p2,p4),diff(Q,p2,p5),di
ff(Q,p2,p6)],
[diff(Q,p3,p1),diff(Q,p3,p2),diff(Q,p3,p3),diff(Q,p3,p4),diff(Q,p3,p5),di
ff(Q,p3,p6)],
[diff(Q,p4,p1),diff(Q,p4,p2),diff(Q,p4,p3),diff(Q,p4,p4),diff(Q,p4,p5),di
ff(Q,p4,p6)],
[diff(Q,p5,p1),diff(Q,p5,p2),diff(Q,p5,p3),diff(Q,p5,p4),diff(Q,p5,p5),di
ff(Q,p5,p6)],
[diff(Q,p6,p1),diff(Q,p6,p2),diff(Q,p6,p3),diff(Q,p6,p4),diff(Q,p6,p5),di
ff(Q,p6,p6)]):
> # Jacobiano e Hessiano Numéricos
>
JN:=evalf(subs(Sum=sum,p1=P[1],p2=P[2],p3=P[3],p4=P[4],p5=P[5],
p6=P[6],J)):
>
HN:=evalf(subs(Sum=sum,p1=P[1],p2=P[2],p3=P[3],p4=P[4],p5=P[5],
p6=P[6],H)):
>
QN:=evalf(subs(Sum=sum,p1=P[1],p2=P[2],p3=P[3],p4=P[4],p5=P[5],
p6=P[6],Q)):
> # Valor Inicial
> P:=Vector([[1.2],[-1.3],[0.015],[0.01],[0.01],[1.3]]):
Model:=evalf(Modelo(P[1],P[2],P[3],P[4],P[5],P[6])):
MP1:=plot(subs(x=XL[1],Model),t=0..tau[JM],color=black):
MP2:=plot(subs(x=XL[2],Model),t=0..tau[JM],color=black):
display(MP1,MP2,EP);
> # Verificação do Hessiano
HN,QN;
> # Inicialização do Histórico
> DH:=Vector([0,0,0,0,0,0]);

```

```

> PH:=Vector([0,0,0,0,0,0]);
> AH:=Vector([0]);
> QH:=Vector([0]);
> beta:=0;
> # Inicialização do Gradiente Conjugado
> r:=-JN;
> IM:=MatrixInverse(Diagonal(Diagonal(HN)));
> s:=IM.r;
> d:=s;
> del_new:=Transpose(r).d;
> del_ini:=del_new;
> iam:=30; jam:=20; kp:=0; kl:=0;
> # Loop do Gradiente Conjugado
for i from 1 to iam while del_new>(1E-15)*del_ini do
kl:=kl+1;
kp:=kp+1;
DH:=<DH|d>;
PH:=<PH|P>;
QH:=<QH|QN>;
del_d:=Transpose(d).d;
alph:=1;
acum:=0;
# Loop Newton-Raphson
for j from 1 to jam while alph^2*del_d>1E-10 do
alph:=-((Transpose(JN).d)/(Transpose(d).HN.d));
P:=P+alph.d;
acum:=acum+alph;
print(i,j,alph^2*del_d);
od;
AH:=<AH|acum>;
# Coeficiente de Polak-Ribière
r:=-JN;
del_old:=del_new;
del_mid:=Transpose(r).s;
IM:=MatrixInverse(Diagonal(Diagonal(HN)));
s:=IM.r;
del_new:=Transpose(r).s;
beta:=(del_new-del_mid)/del_old;
if beta<0 then d:=s; else d:=s+beta.d; fi;
if kl=3 then d:=s; kl:=0; fi;
print(i,d,P,QN,del_new/del_ini);

```

od:

```

> Model:=evalf(Modelo(P[1],P[2],P[3],P[4],P[5],P[6])):
MP1:=plot(subs(x=XL[1],Model),t=0..tau[JM],color=black):
MP2:=plot(subs(x=XL[2],Model),t=0..tau[JM],color=black):
display(EP,MP1,MP2);
> kp;
> nrf:=kp+1:
plot([[seq([nr-1,PH[1][nr]],nr=2..nrf)],[seq([nr-1,PH[2][nr]],nr=2..nrf)]]);
plot([[seq([nr-1,PH[3][nr]],nr=2..nrf)],[seq([nr-1,PH[4][nr]],nr=2..nrf)]]);
plot([[seq([nr-1,PH[5][nr]],nr=2..nrf)]]);
plot([[seq([nr-1,PH[6][nr]],nr=2..nrf)]]);
> plot([P[1]*FE[1]*(P[6]*FE[6]*t)^(P[3]*FE[3])+P[2]*FE[2]*(P[6]*FE[6]*(t-P[5]*FE[5]))^(P[4]*FE[4])*Heaviside(t-P[5]*FE[5]),Heaviside(t)-Heaviside(t-0.025001)],t=0..tau[JM],color=[blue,red]);
> MPN:=plot(subs(x=XL[3],Model),t=0..tau[JM],color=black):
> EPN:=ErrorPlot([seq(YN[j],j=1..JM)],xcoords=[seq(tau[j],j=1..JM)],yerrors=[seq(sigma[j],j=1..JM)],color=[blue]):
> display(EP,MP1,MP2,EPN,MPN);
> JF:=Matrix([
[seq(evalf(subs(p1=P[1],p2=P[2],p3=P[3],p4=P[4],p5=P[5],p6=P[6],x=X[j],t=tau[j],diff(Modelo(p1,p2,p3,p4,p5,p6),p1)/sigma[j])),j=1..JM)
],
[seq(evalf(subs(p1=P[1],p2=P[2],p3=P[3],p4=P[4],p5=P[5],p6=P[6],x=X[j],t=tau[j],diff(Modelo(p1,p2,p3,p4,p5,p6),p2)/sigma[j])),j=1..JM)
],
[seq(evalf(subs(p1=P[1],p2=P[2],p3=P[3],p4=P[4],p5=P[5],p6=P[6],x=X[j],t=tau[j],diff(Modelo(p1,p2,p3,p4,p5,p6),p3)/sigma[j])),j=1..JM)
],
[seq(evalf(subs(p1=P[1],p2=P[2],p3=P[3],p4=P[4],p5=P[5],p6=P[6],x=X[j],t=tau[j],diff(Modelo(p1,p2,p3,p4,p5,p6),p4)/sigma[j])),j=1..JM)
],
[seq(evalf(subs(p1=P[1],p2=P[2],p3=P[3],p4=P[4],p5=P[5],p6=P[6],x=X[j],t=tau[j],diff(Modelo(p1,p2,p3,p4,p5,p6),p5)/sigma[j])),j=1..JM)
],
[seq(evalf(subs(p1=P[1],p2=P[2],p3=P[3],p4=P[4],p5=P[5],p6=P[6],x=X[j],t=tau[j],diff(Modelo(p1,p2,p3,p4,p5,p6),p6)/sigma[j])),j=1..JM)
]):
> VF:=MatrixInverse(JF.Transpose(JF));
> DP:=Vector([P[1]-p1,P[2]-p2,P[3]-p3,P[4]-p4,P[5]-p5,P[6]-p6]):

```

> # Intervalo de Confiança 99%

IC:=2.576:

```
IC99:=Matrix([
[P[1]-IC*sqrt(VF[1,1]),P[1],P[1]+IC*sqrt(VF[1,1]),
[P[2]-IC*sqrt(VF[2,2]),P[2],P[2]+IC*sqrt(VF[2,2]),
[P[3]-IC*sqrt(VF[3,3]),P[3],P[3]+IC*sqrt(VF[3,3]),
[P[4]-IC*sqrt(VF[4,4]),P[4],P[4]+IC*sqrt(VF[4,4]),
[P[5]-IC*sqrt(VF[5,5]),P[5],P[5]+IC*sqrt(VF[5,5]),
[P[6]-IC*sqrt(VF[6,6]),P[6],P[6]+IC*sqrt(VF[6,6])]);
RC99:=15.1:
```

R99:=Transpose(DP).MatrixInverse(VF).DP-RC99:

> # Intervalo de Confiança 95%

IC=1.96:

```
IC95:=Matrix([
[P[1]-IC*sqrt(VF[1,1]),P[1],P[1]+IC*sqrt(VF[1,1]),
[P[2]-IC*sqrt(VF[2,2]),P[2],P[2]+IC*sqrt(VF[2,2]),
[P[3]-IC*sqrt(VF[3,3]),P[3],P[3]+IC*sqrt(VF[3,3]),
[P[4]-IC*sqrt(VF[4,4]),P[4],P[4]+IC*sqrt(VF[4,4]),
[P[5]-IC*sqrt(VF[5,5]),P[5],P[5]+IC*sqrt(VF[5,5]),
[P[6]-IC*sqrt(VF[6,6]),P[6],P[6]+IC*sqrt(VF[6,6])]);
RC95:=11.1:
```

R95:=Transpose(DP).MatrixInverse(VF).DP-RC95:

> IC99,IC95;

```
> G99:=implicitplot(evalf(subs(p1=P[1],p3=P[3],p5=P[5],p6=P[6],R99)
),p2=IC99[2][1]..IC99[2][3],p4=IC99[4][1]..IC99[4][3],
color=black,grid=[200,200]):
```

```
G95:=implicitplot(evalf(subs(p1=P[1],p3=P[3],p5=P[5],p6=P[6],R95)),
p2=IC95[2][1]..IC95[2][3],p4=IC95[4][1]..IC95[4][3],
color=blue,grid=[200,200]):
```

```
GP:=pointplot([P[2],P[4]],symbol=cross,color=black,symbolsize=25):
```

```
GT:=pointplot([-1,0],symbol=circle,color=black,symbolsize=25):
display([GT,GP,G99,G95]);
```

```
> G99:=implicitplot(evalf(subs(p2=P[2],p4=P[4],p5=P[5],p6=P[6],R99)
),p1=IC99[1][1]..IC99[1][3],p3=IC99[3][1]..IC99[3][3],
color=black,grid=[200,200]):
```

```
G95:=implicitplot(evalf(subs(p2=P[2],p4=P[4],p5=P[5],p6=P[6],R95)),
p1=IC95[1][1]..IC95[1][3],p3=IC95[3][1]..IC95[3][3],
color=blue,grid=[200,200]):
```

```
GP:=pointplot([P[1],P[3]],symbol=cross,color=black,symbolsize=25):
```

```
GT:=pointplot([1,0],symbol=circle,color=black,symbolsize=25):
display([GT,GP,G99,G95]);
```

```

> G99:=implicitplot(evalf(subs(p3=P[3],p4=P[4],p5=P[5],p6=P[6],R99)
),p1=IC99[1][1]..IC99[1][3],p2=IC99[2][1]..IC99[2][3],
color=black,grid=[200,200]):
G95:=implicitplot(evalf(subs(p3=P[3],p4=P[4],p5=P[5],p6=P[6],R95)),
p1=IC95[1][1]..IC95[1][3],p2=IC95[2][1]..IC95[2][3],
color=blue,grid=[200,200]):
GP:=pointplot([P[1],P[2]],symbol=cross,color=black,symbolsize=25):
GT:=pointplot([1,-1],symbol=circle,color=black,symbolsize=25):
display([GT,GP,G99,G95]);
> G99:=implicitplot(evalf(subs(p1=P[1],p2=P[2],p5=P[5],p6=P[6],R99)
),p3=IC99[3][1]..IC99[3][3],p4=IC99[4][1]..IC99[4][3],
color=black,grid=[200,200]):
G95:=implicitplot(evalf(subs(p1=P[1],p2=P[2],p5=P[5],p6=P[6],R95)),
p3=IC95[3][1]..IC95[3][3],p4=IC95[4][1]..IC95[4][3],
color=blue,grid=[200,200]):
GP:=pointplot([P[3],P[4]],symbol=cross,color=black,symbolsize=25):
GT:=pointplot([0,0],symbol=circle,color=black,symbolsize=25):
display([GT,GP,G99,G95]);
> G99:=implicitplot(evalf(subs(p1=P[1],p2=P[2],p3=P[3],p4=P[4],R99)
),p5=IC99[5][1]..IC99[5][3],p6=IC99[6][1]..IC99[6][3],
color=black,grid=[200,200]):
G95:=implicitplot(evalf(subs(p1=P[1],p2=P[2],p3=P[3],p4=P[4],R95)),
p5=IC95[5][1]..IC95[5][3],p6=IC95[6][1]..IC95[6][3],
color=blue,grid=[200,200]):
GP:=pointplot([P[5],P[6]],symbol=cross,color=black,symbolsize=25):
GT:=pointplot([0.025001,1],symbol=circle,color=black,symbolsize=25)
:
display([GT,GP,G99,G95]);
> P;
> display(seq(display(plot(subs(x=XL[1],evalf(Modelo(PH[1,kn+1],
PH[2,kn+1],PH[3,kn+1],PH[4,kn+1],PH[5,kn+1],PH[6,kn+1]))),
t=0..tau[JM],color=black),
plot(subs(x=XL[2],evalf(Modelo(PH[1,kn+1],PH[2,kn+1],PH[3,kn+1],
PH[4,kn+1],PH[5,kn+1],PH[6,kn+1]))),t=0..tau[JM],color=black),EP),
kn=1..kp),insequence=true);
>

```



## **APÊNDICE D – SOLUÇÕES DIRETAS**

Neste anexo são apresentados os gráficos de todas as combinações de condições de contorno utilizadas para a comparação entre os métodos na solução do problema direto. A explicação detalhada de um gráfico representativo, bem como as análises sobre os mesmos encontram-se no corpo do Capítulo 4.

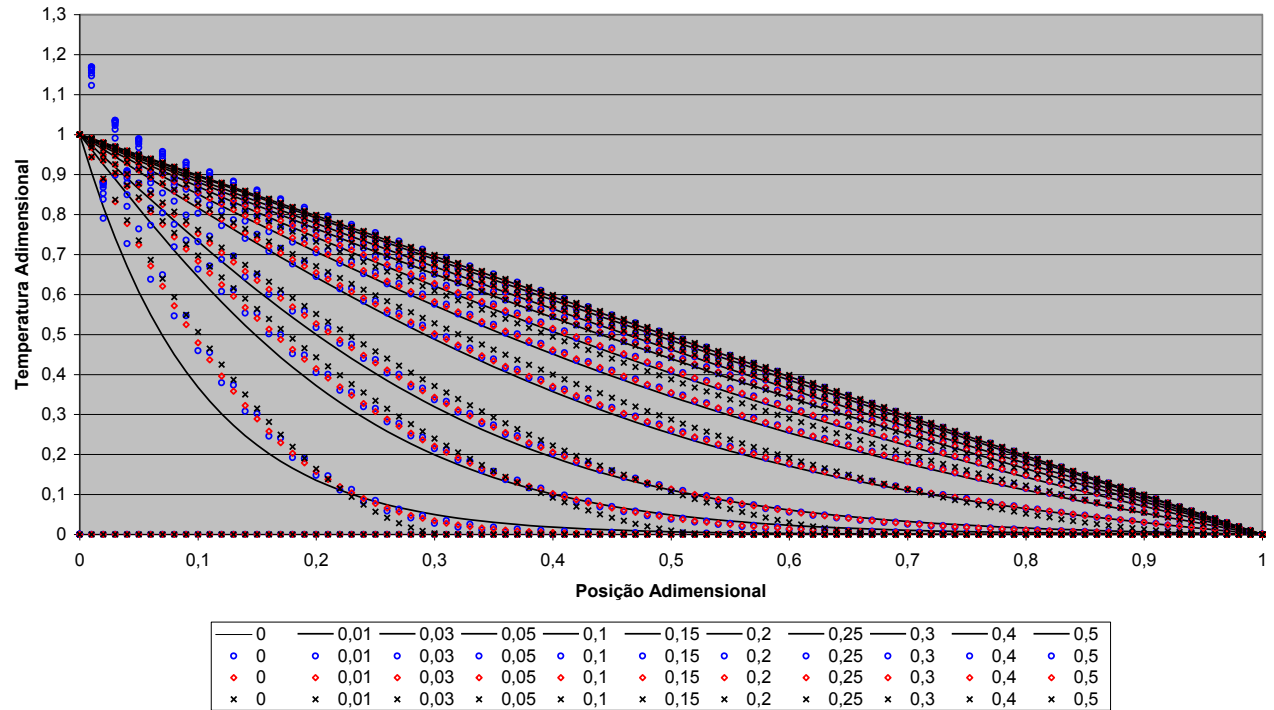


Fig. D-1 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,5 ) pelos diversos métodos ( – VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de temperatura prescrita constante à esquerda e temperatura prescrita à direita.

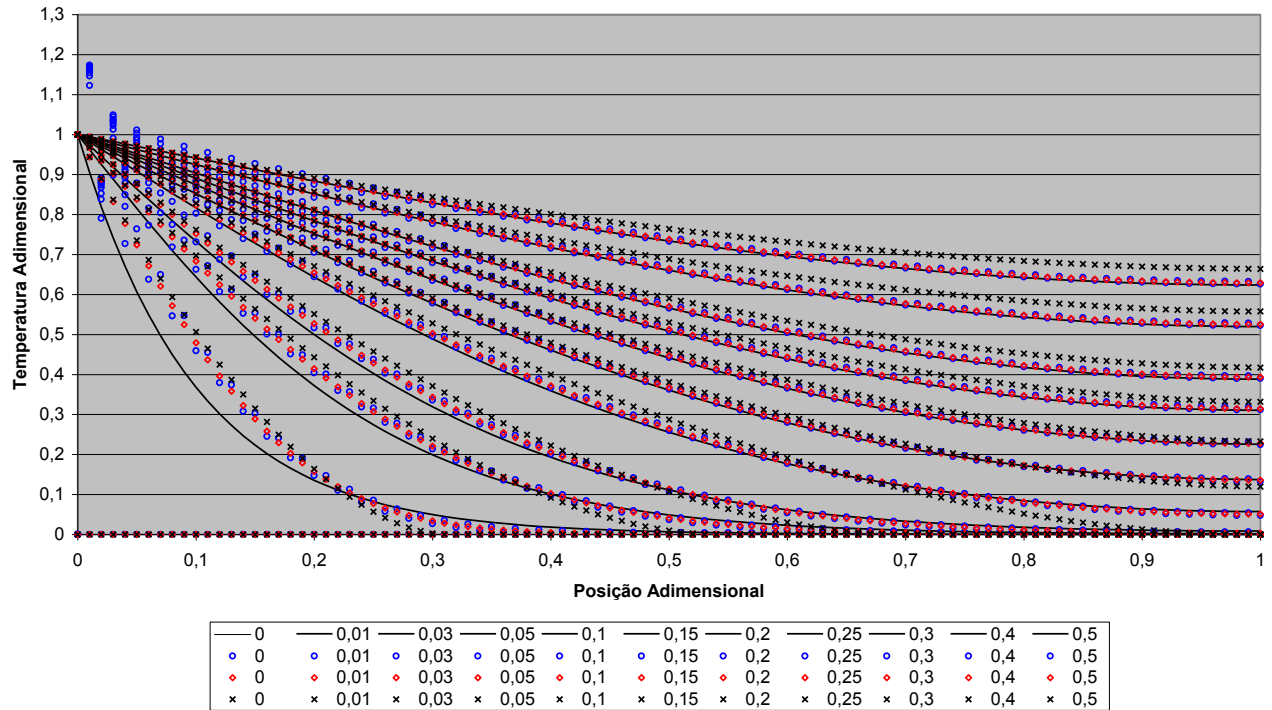


Fig. D-2 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de temperatura prescrita constante à esquerda e fluxo prescrito à direita.

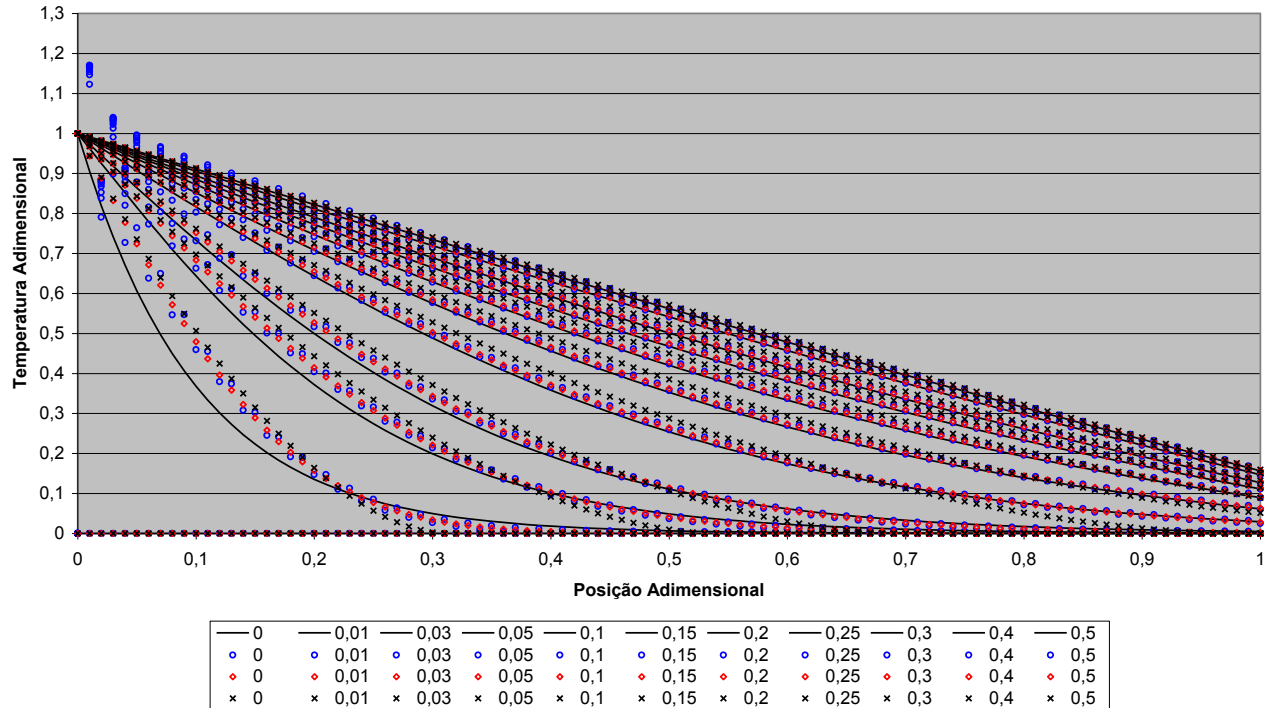


Fig. D-3 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,5 ) pelos diversos métodos ( — VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de temperatura prescrita constante à esquerda e convecção à direita.

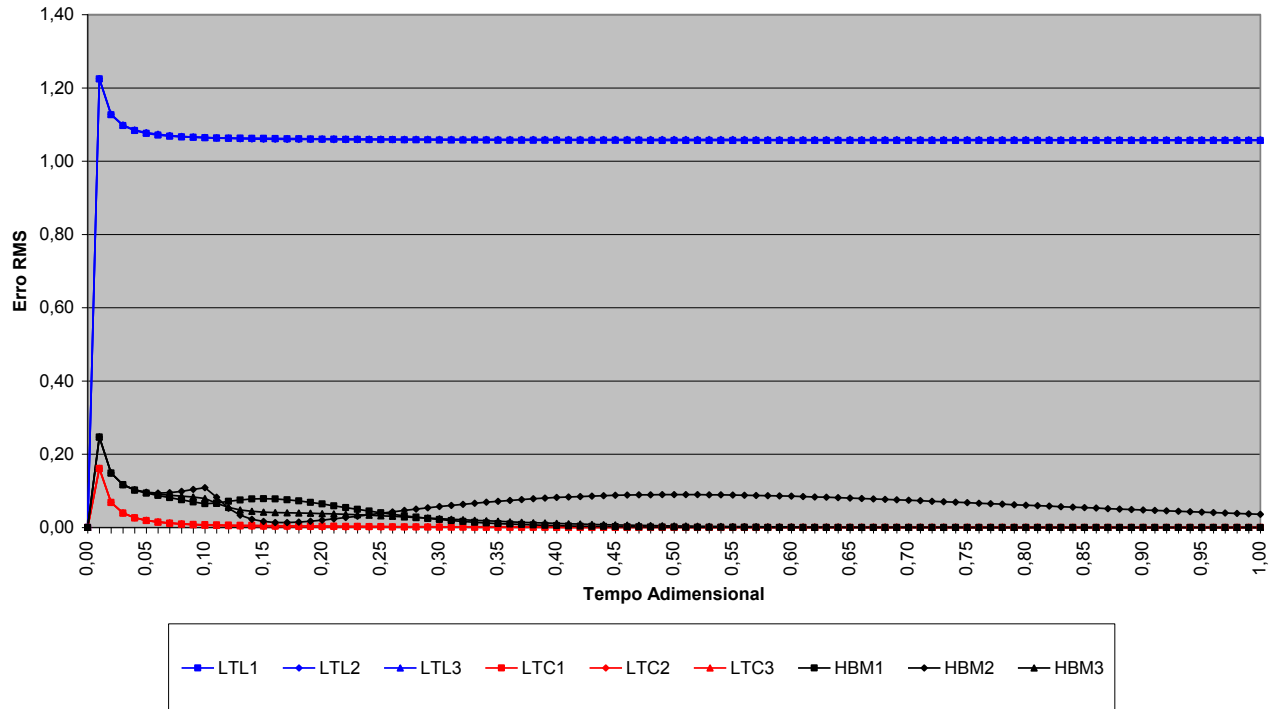


Fig. D-4 – Análise do erro RMS das soluções (LTL, LTC e HBM) em comparação a de VF para as condições de temperatura prescrita constante à esquerda e (1 - temperatura prescrita, 2 - fluxo prescrita e 3 - convecção) à direita.

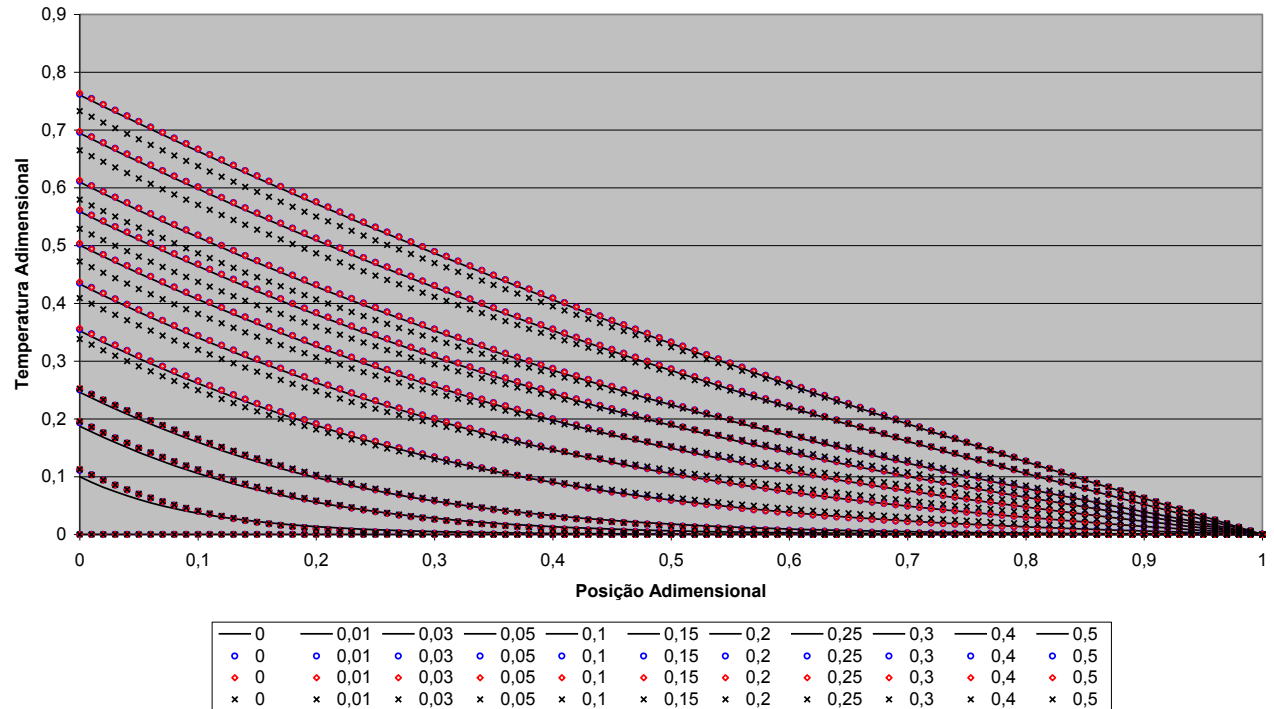


Fig. D-5 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,5 ) pelos diversos métodos ( — VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM ) para as condições de fluxo prescrito constante à esquerda e temperatura prescrita à direita.

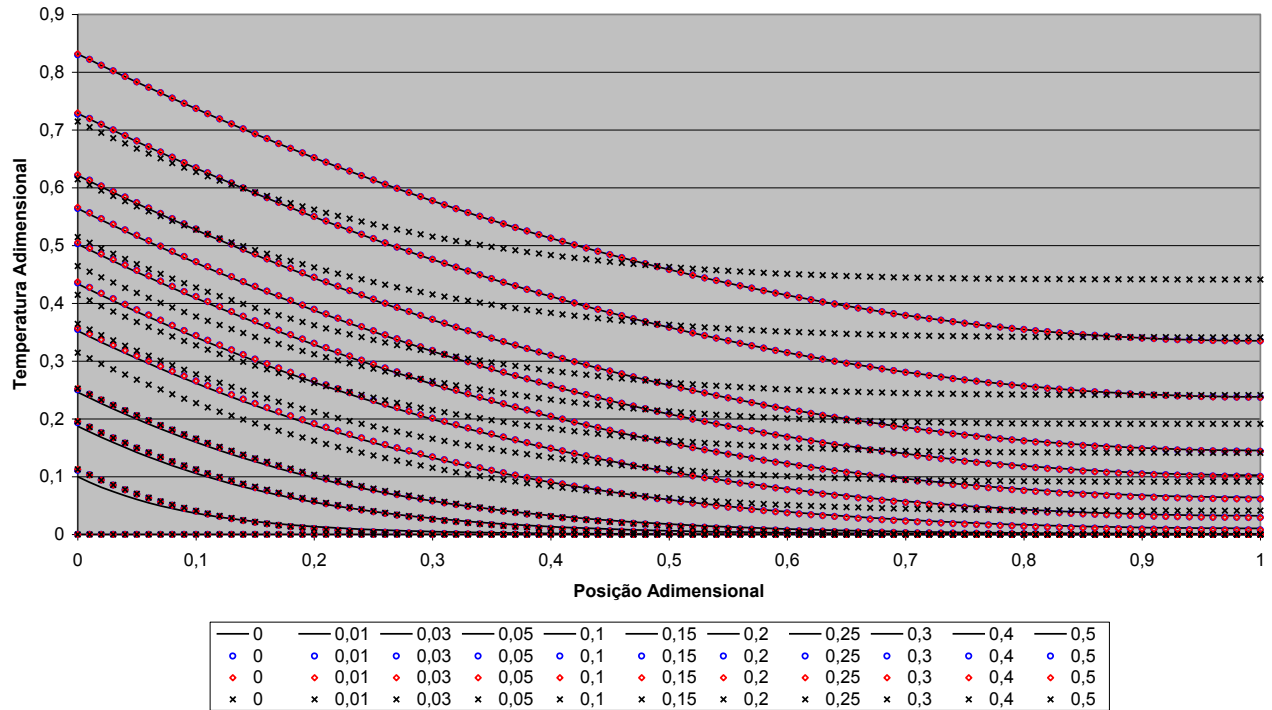


Fig. D-6 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de fluxo prescrito constante à esquerda e fluxo prescrito à direita.

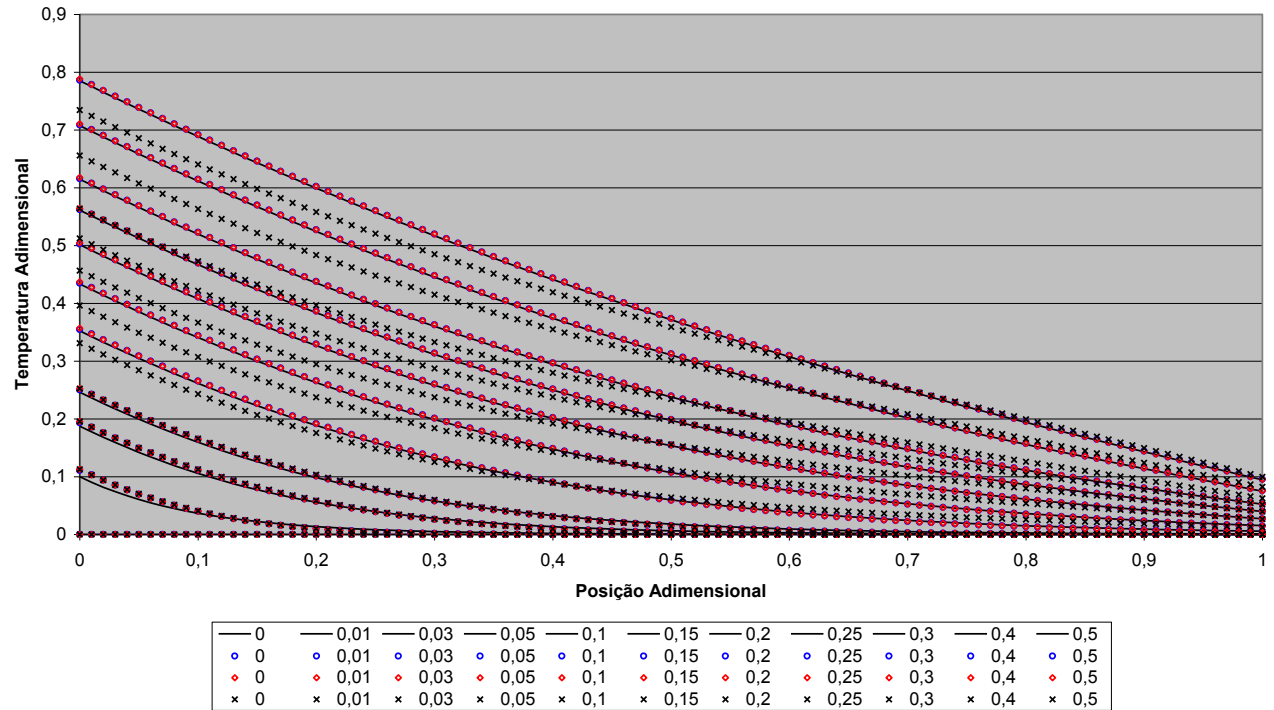


Fig. D-7 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,5 ) pelos diversos métodos ( — VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM ) para as condições de fluxo prescrito constante à esquerda e convecção à direita.



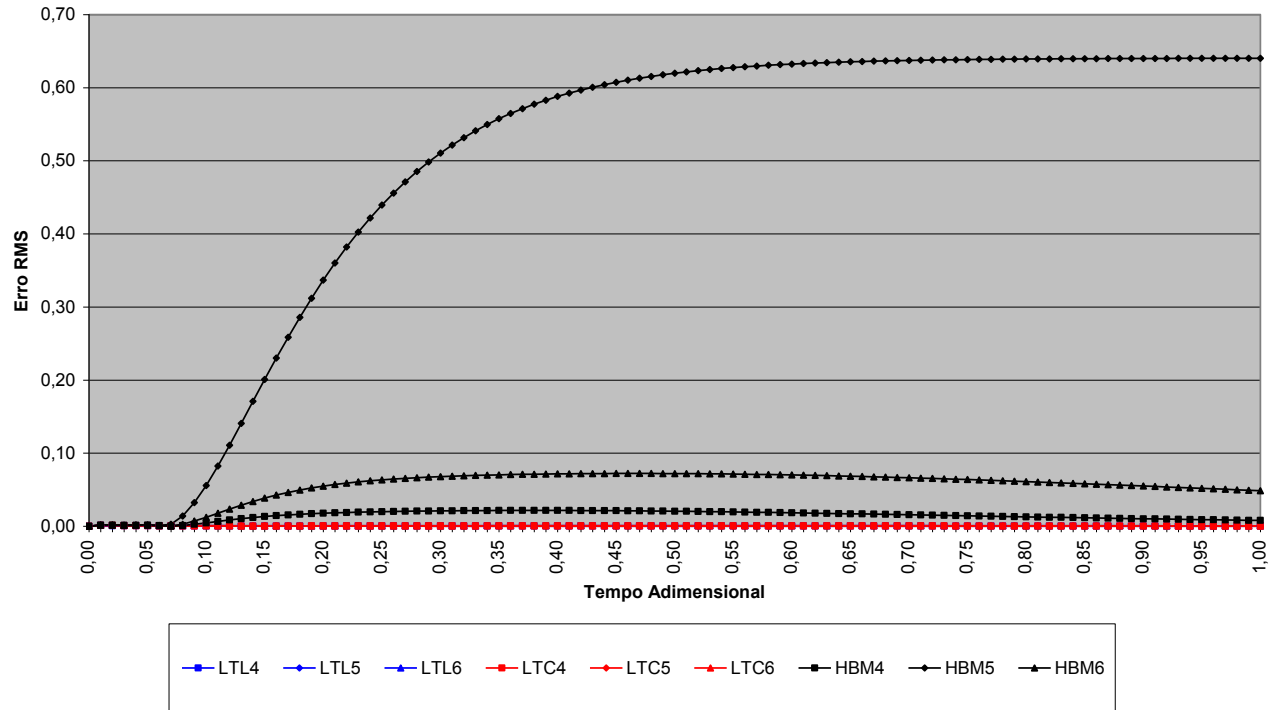


Fig. D-8 – Análise do erro RMS das soluções (LTL, LTC e HBM) em comparação a de VF para as condições de fluxo prescrito constante à esquerda e (4 - temperatura prescrita, 5 - fluxo prescrito e 6 - convecção) à direita.

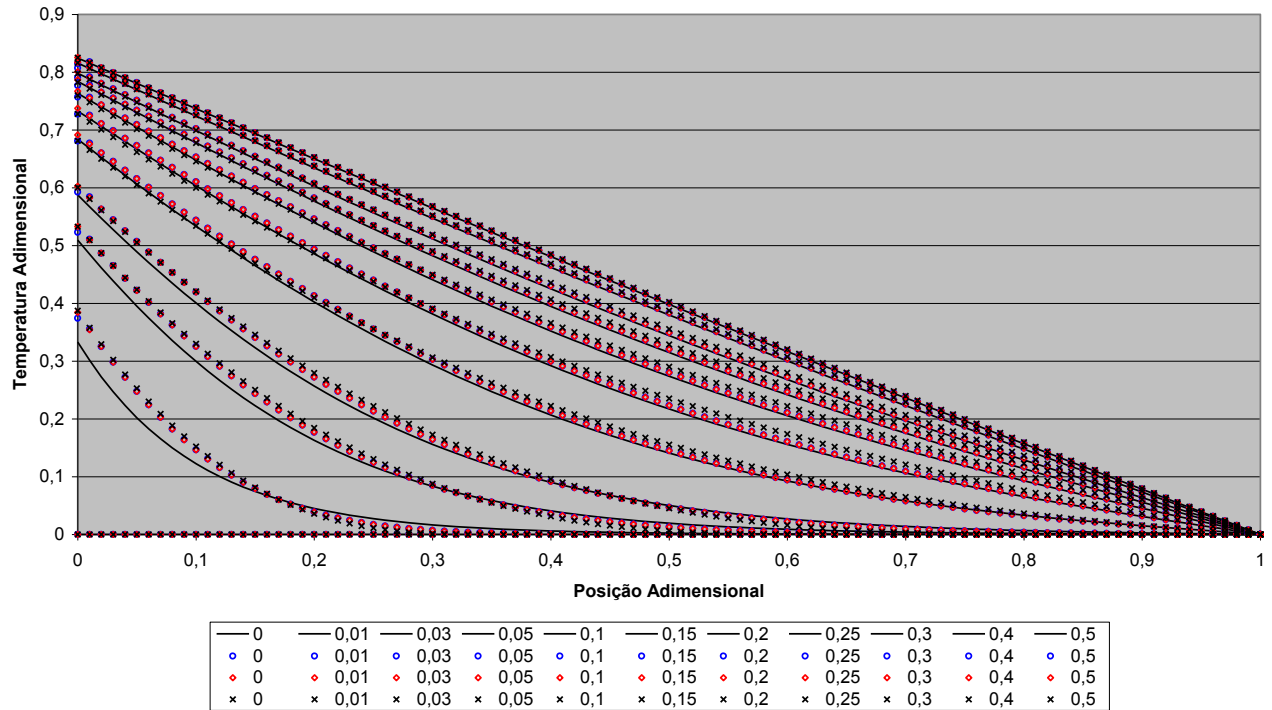


Fig. D-9 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,5 ) pelos diversos métodos ( – VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições convecção constante à esquerda e temperatura prescrita à direita.

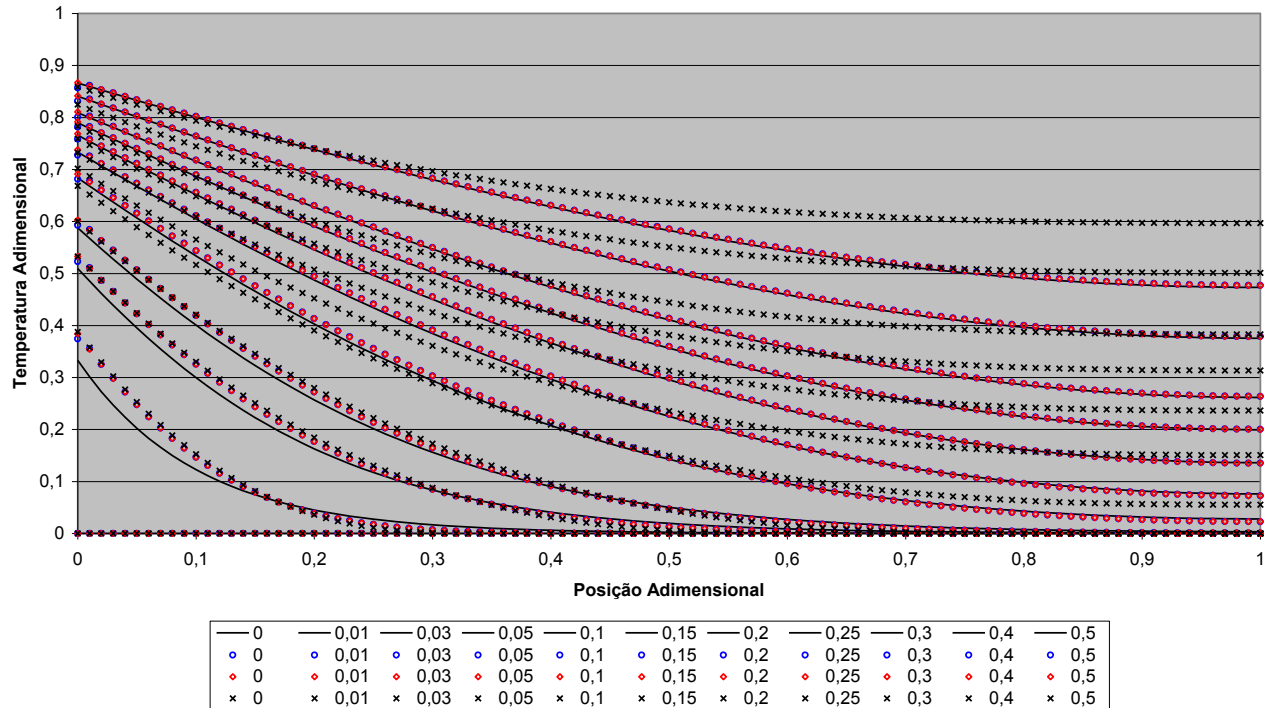


Fig. D-10 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de convecção constante à esquerda e fluxo prescrito à direita.

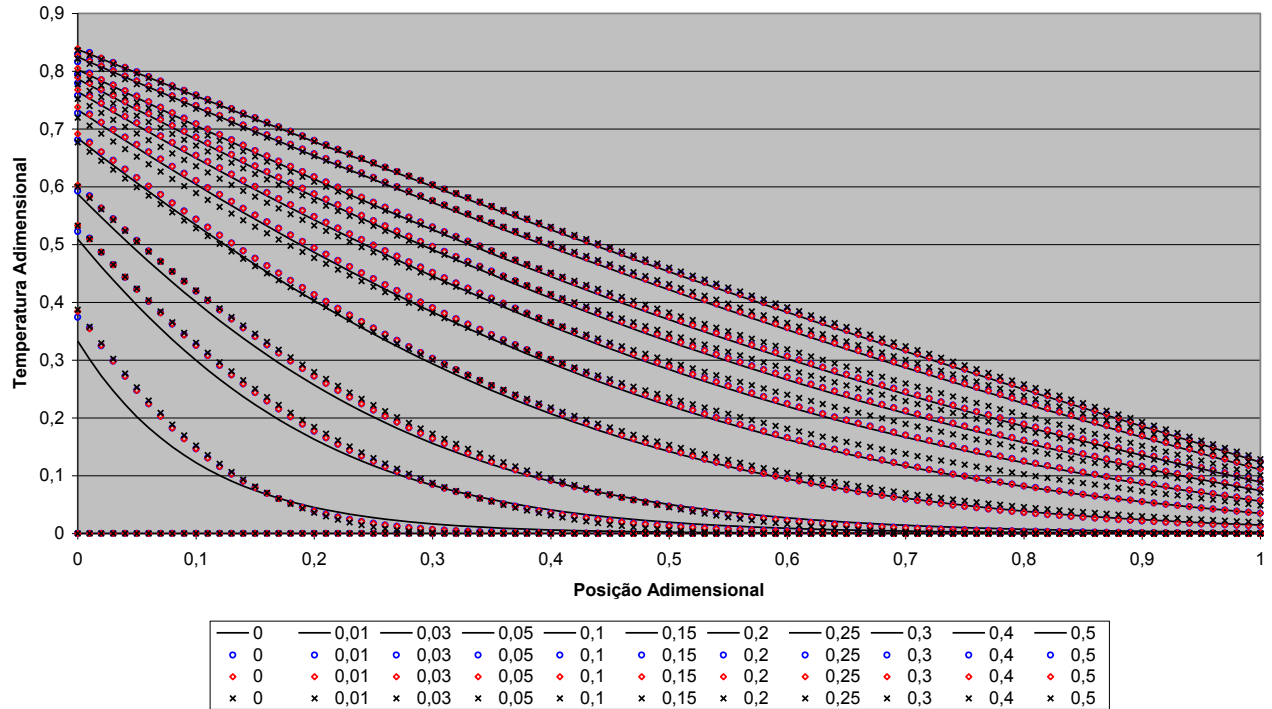


Fig. D-11 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de convecção constante à esquerda e convecção à direita.

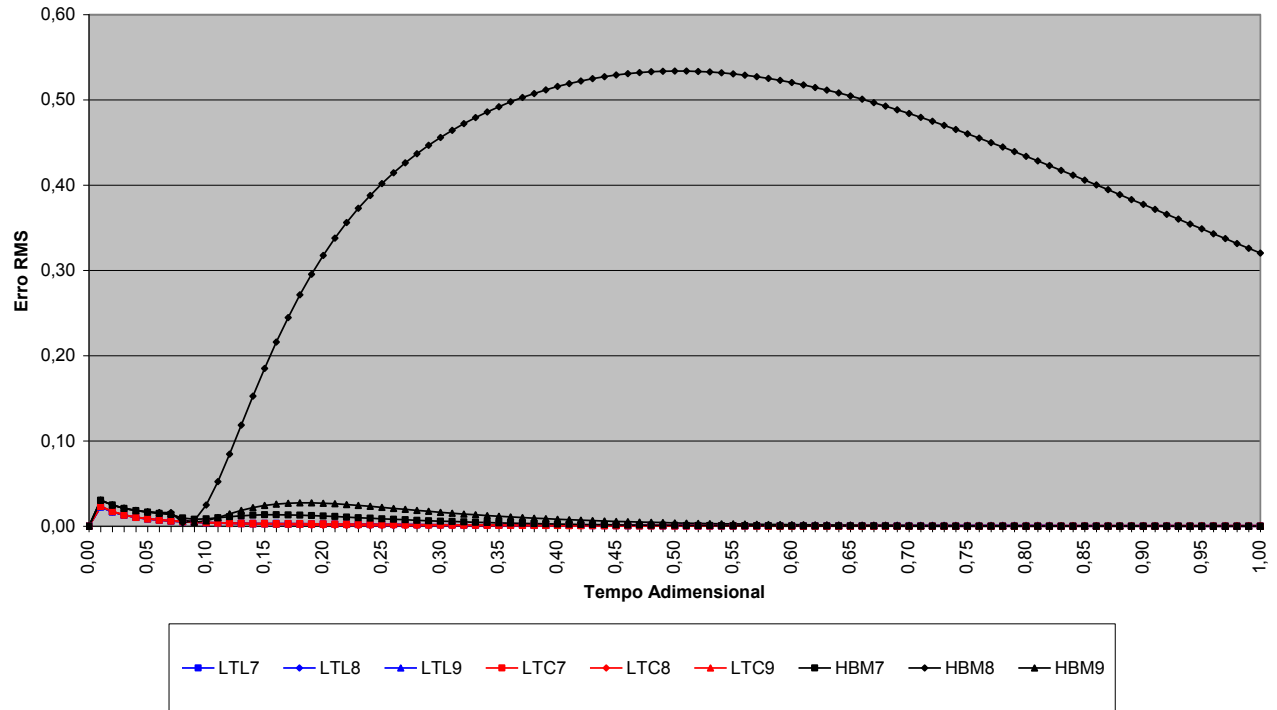


Fig. D-12 – Análise do erro RMS das soluções (LTL, LTC e HBM) em comparação a de VF para as condições de convecção constante à esquerda e (7 - temperatura prescrita, 8 - fluxo prescrita e 9 - convecção) à direita.

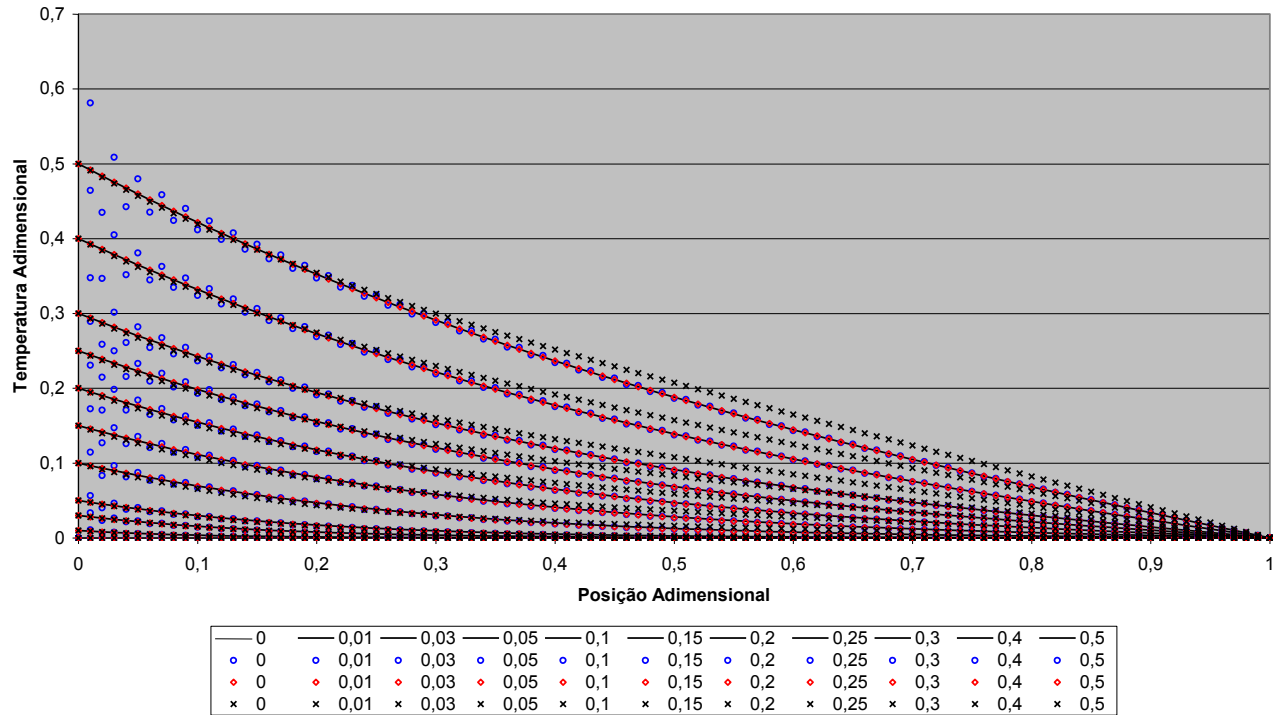


Fig. D-13 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de temperatura prescrita com variação linear à esquerda e temperatura prescrita à direita.

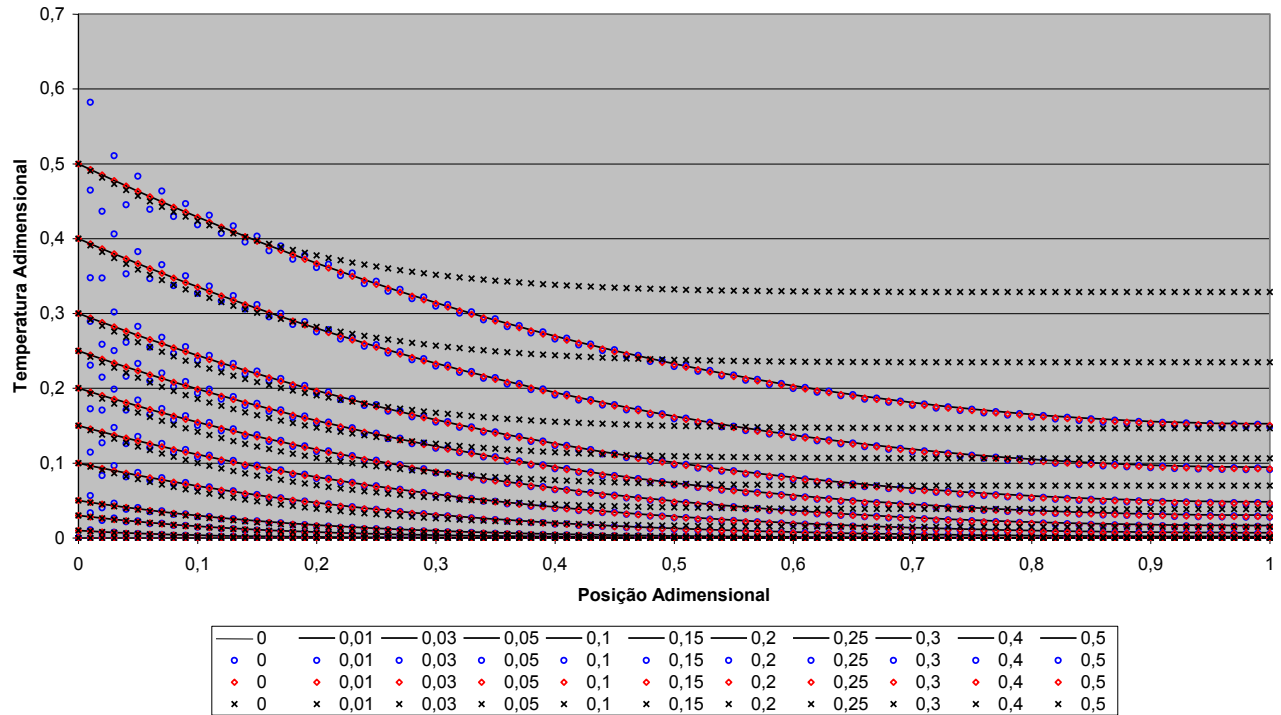


Fig. D-14 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de temperatura prescrita com variação linear à esquerda e fluxo prescrito à direita.

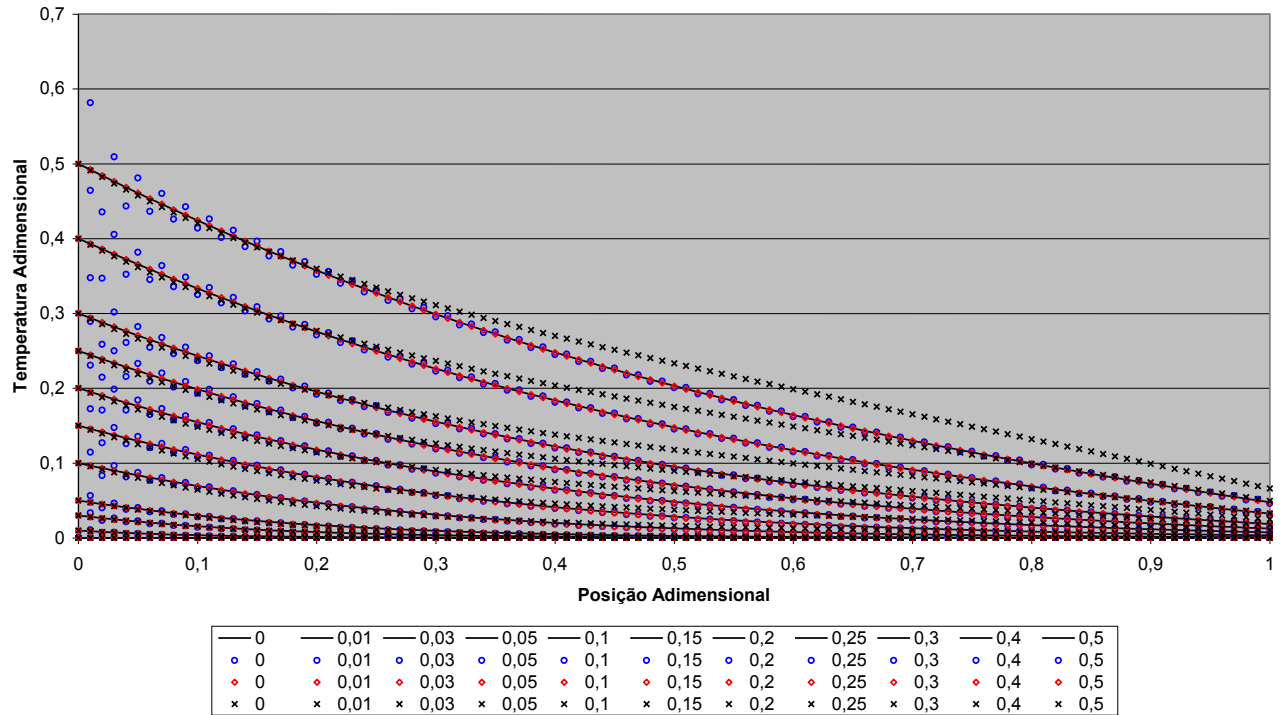


Fig. D-15 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de temperatura prescrita com variação linear à esquerda e convecção à direita.



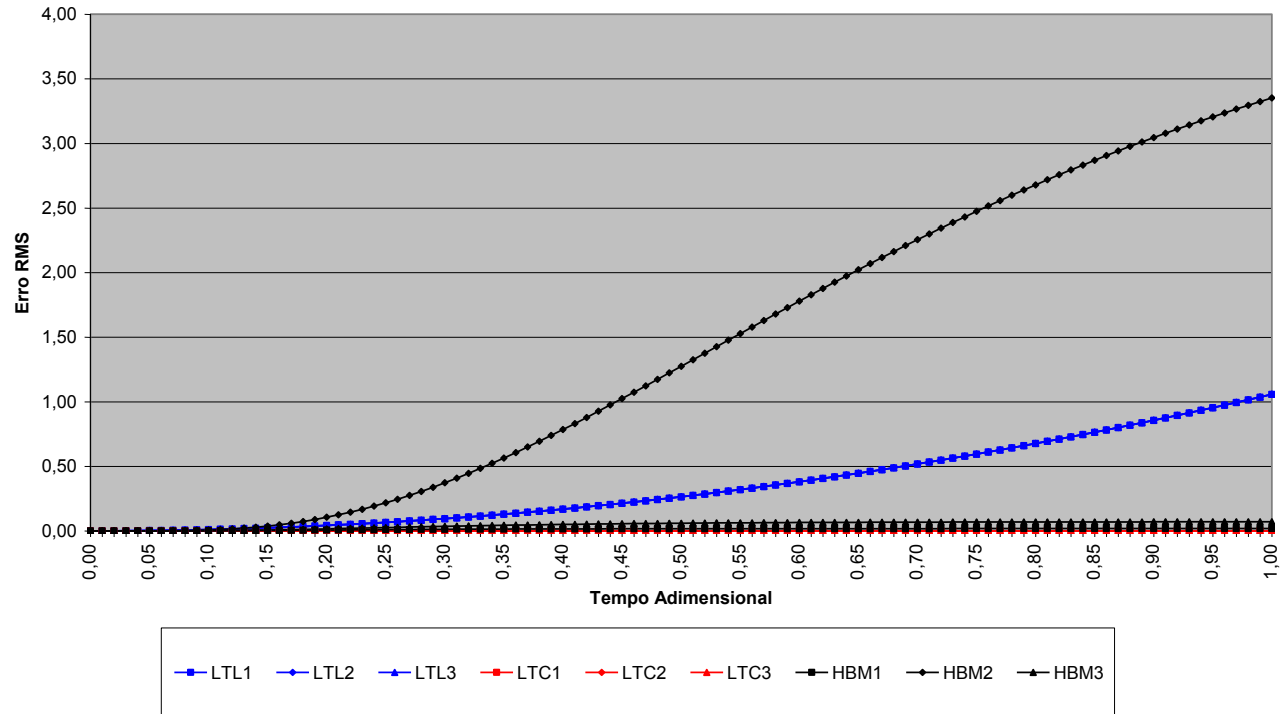


Fig. D-16 – Análise do erro RMS das soluções (LTL, LTC e HBM) em comparação a de VF para as condições de temperatura prescrita à esquerda e (1 - temperatura prescrita, 2 - fluxo prescrita e 3 - convecção) à direita.

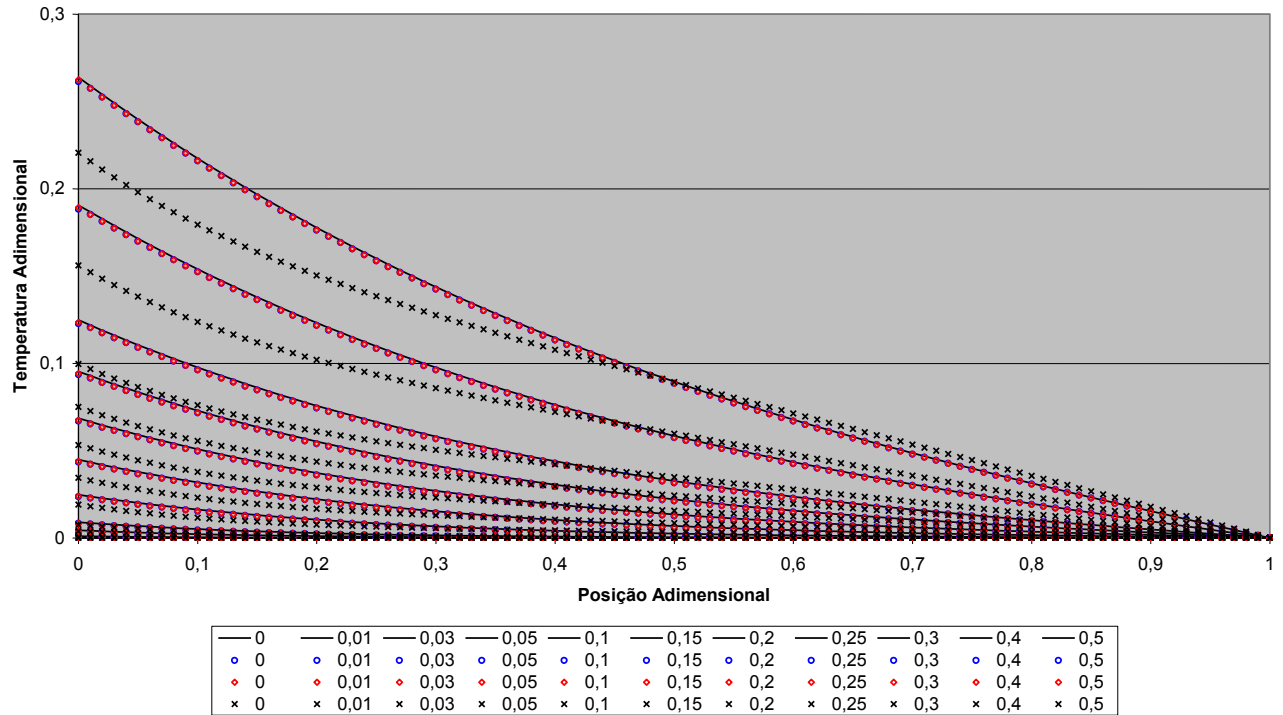


Fig. D-17 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de fluxo prescrito à esquerda e temperatura prescrita à direita.

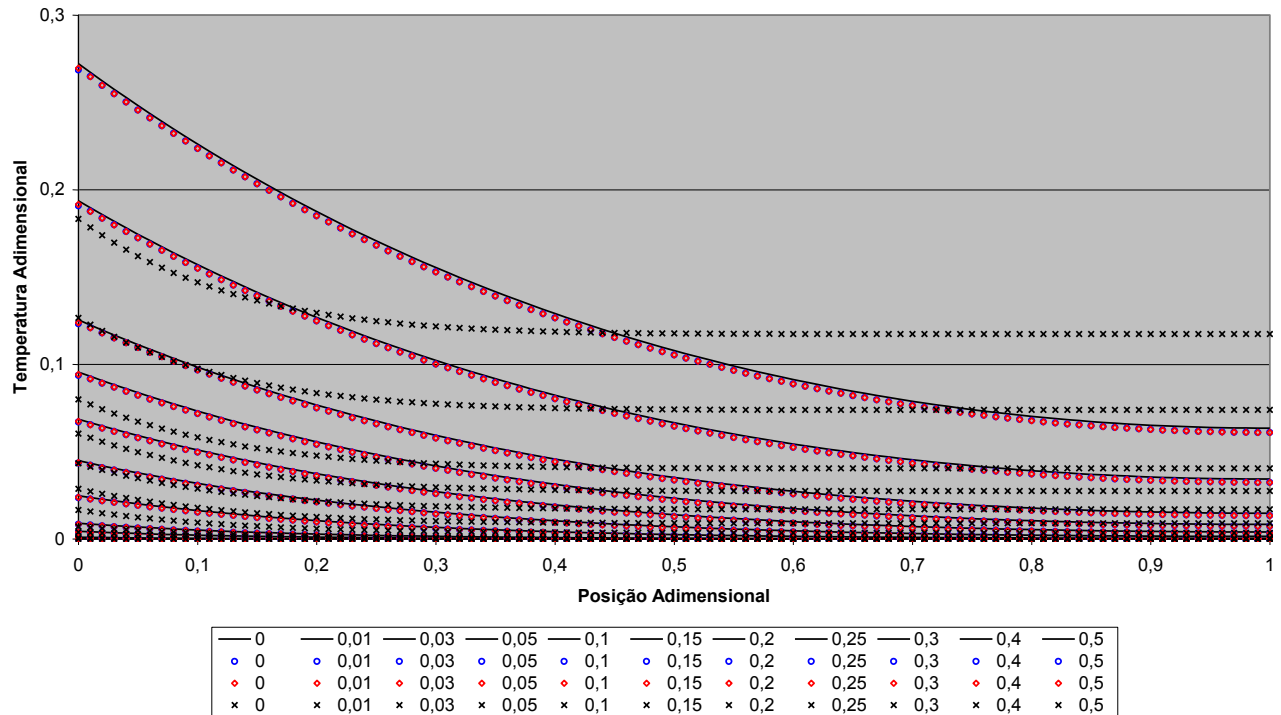


Fig. D-18 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,5 ) pelos diversos métodos ( – VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de fluxo prescrito à esquerda e fluxo prescrito à direita.

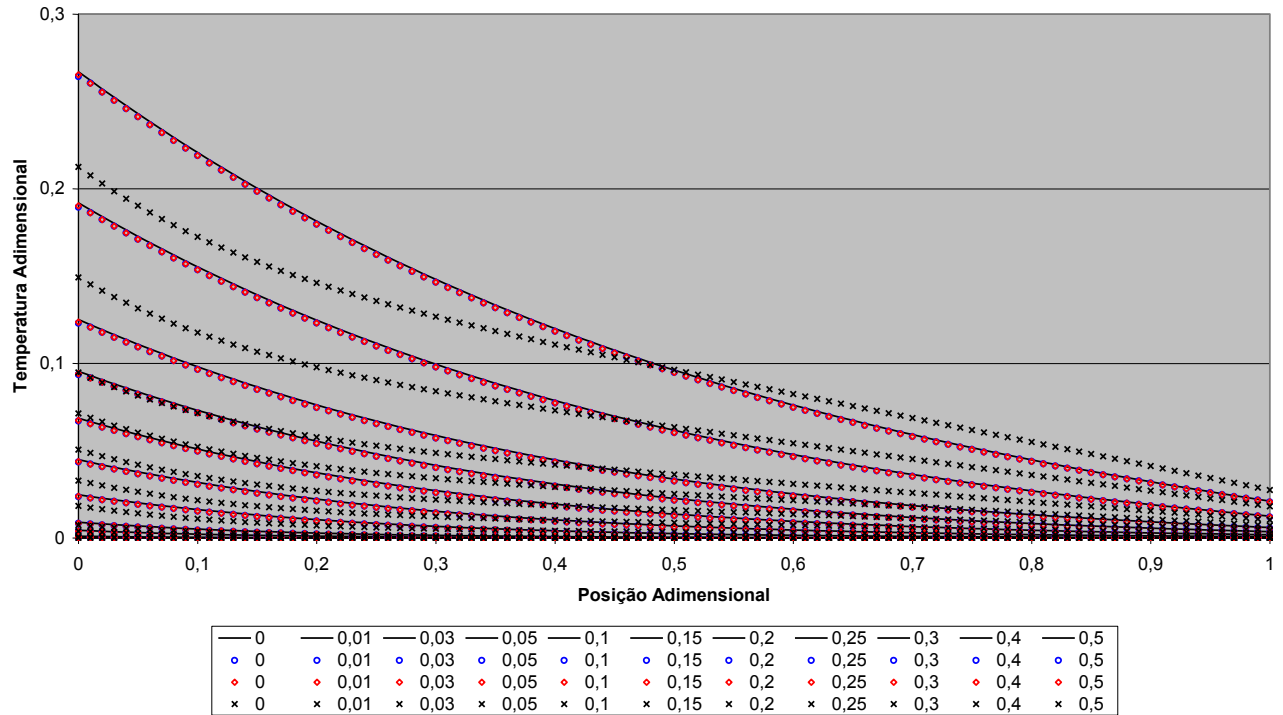


Fig. D-19 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de fluxo prescrito com variação linear à esquerda e convecção à direita.

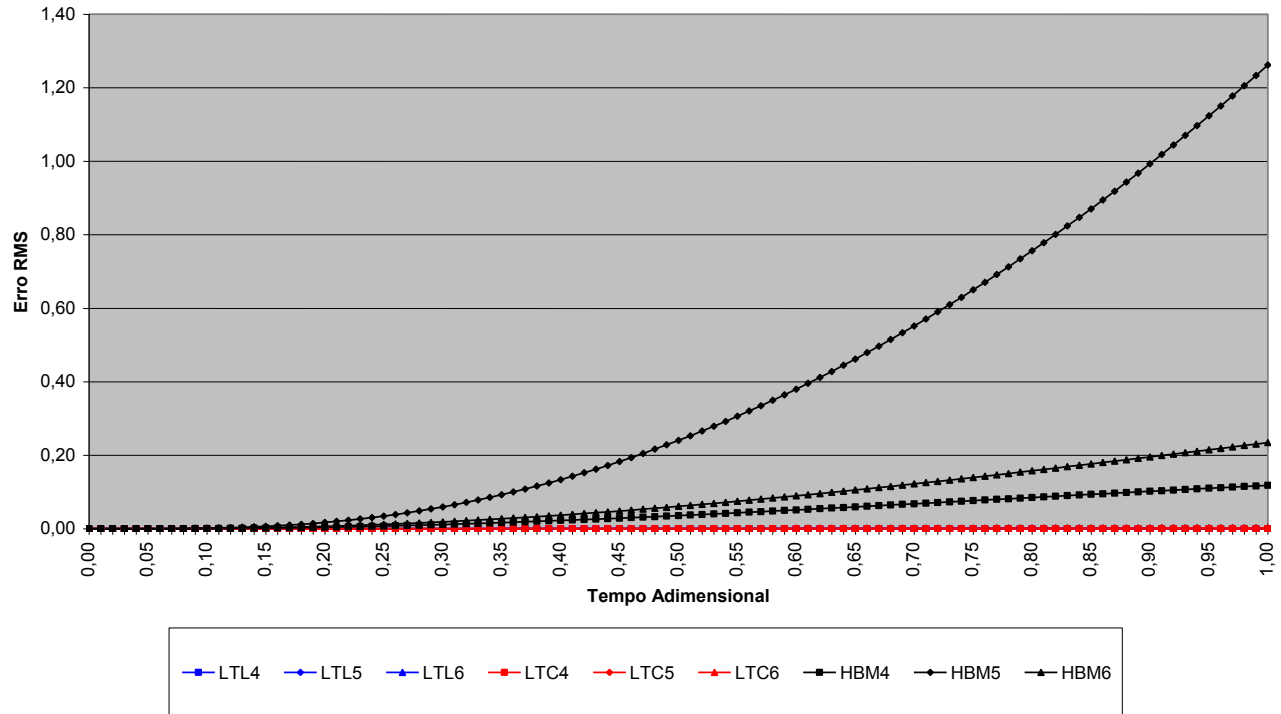


Fig. D-20 – Análise do erro RMS das soluções (LTL, LTC e HBM) em comparação a de VF para as condições de fluxo prescrito com variação linear à esquerda e (4 - temperatura prescrito, 5 - fluxo prescrito e 6 - convecção) à direita.

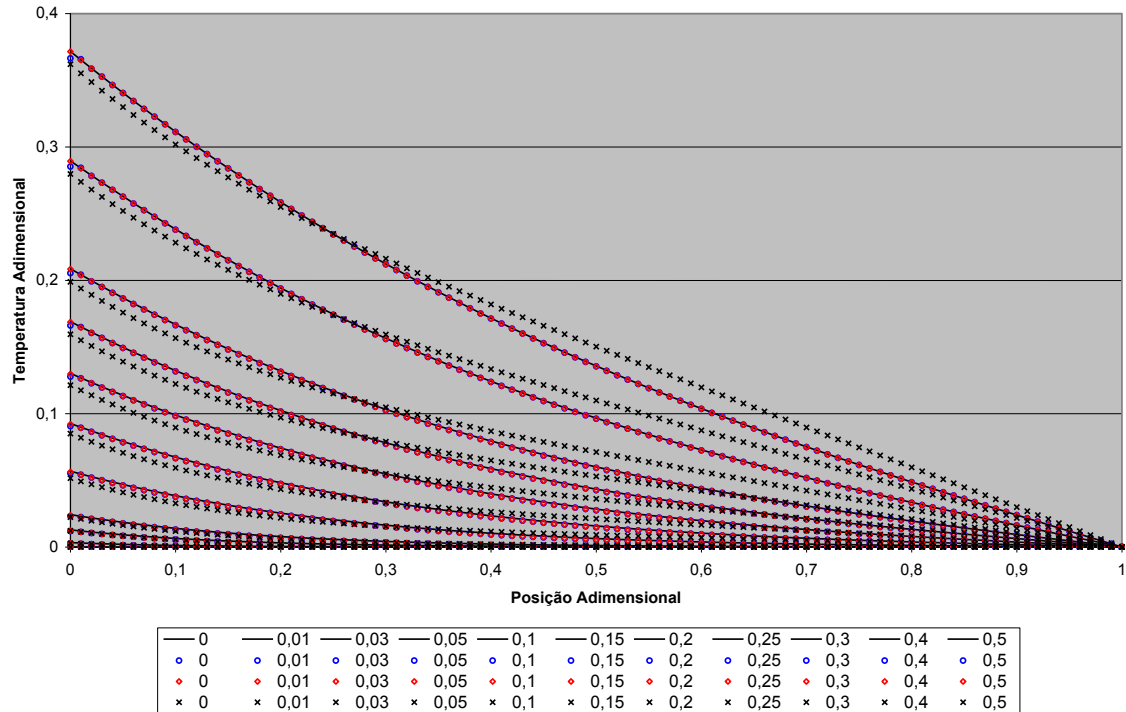


Fig. D-21 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de convecção com variação linear à esquerda e temperatura prescrita à direita.

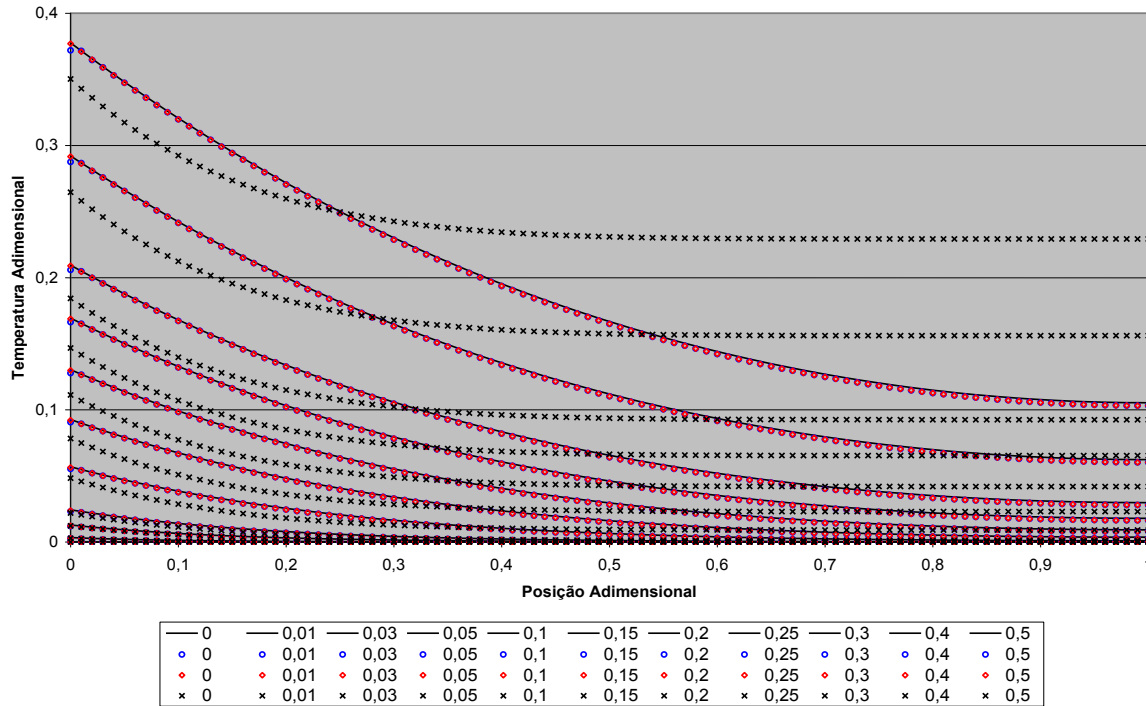


Fig. D-22 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de convecção com variação linear à esquerda e fluxo prescrito à direita.

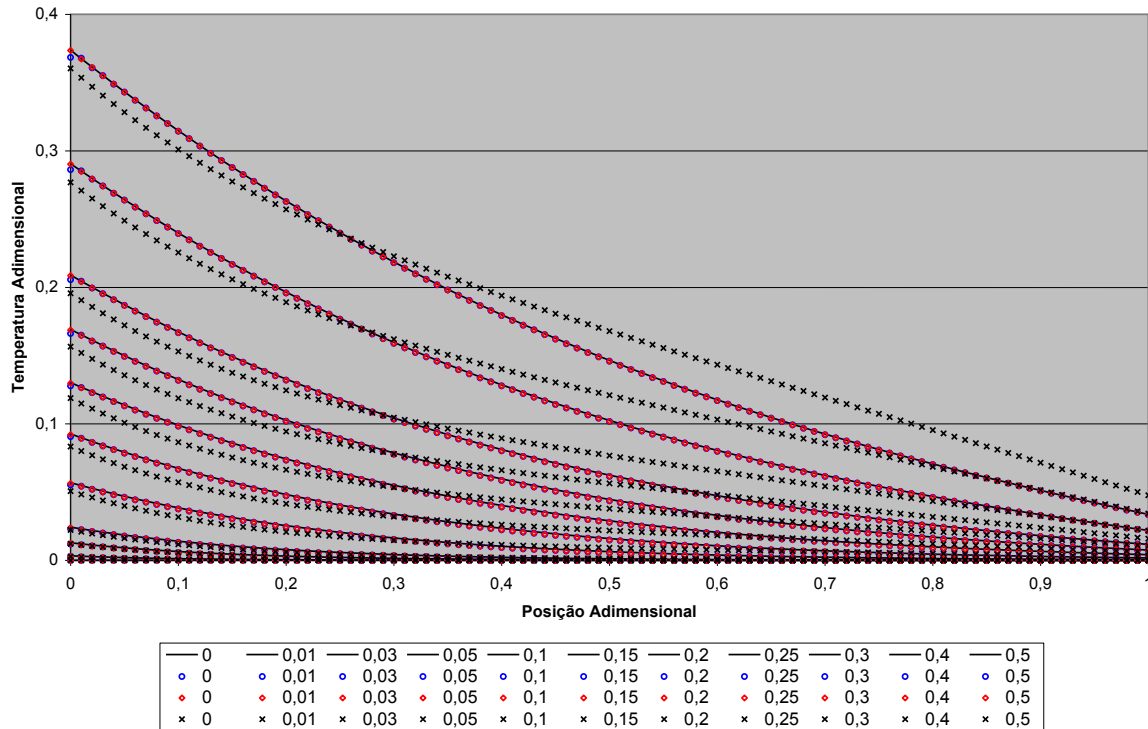


Fig. D-23 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,5) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de convecção com variação linear à esquerda e convecção à direita.



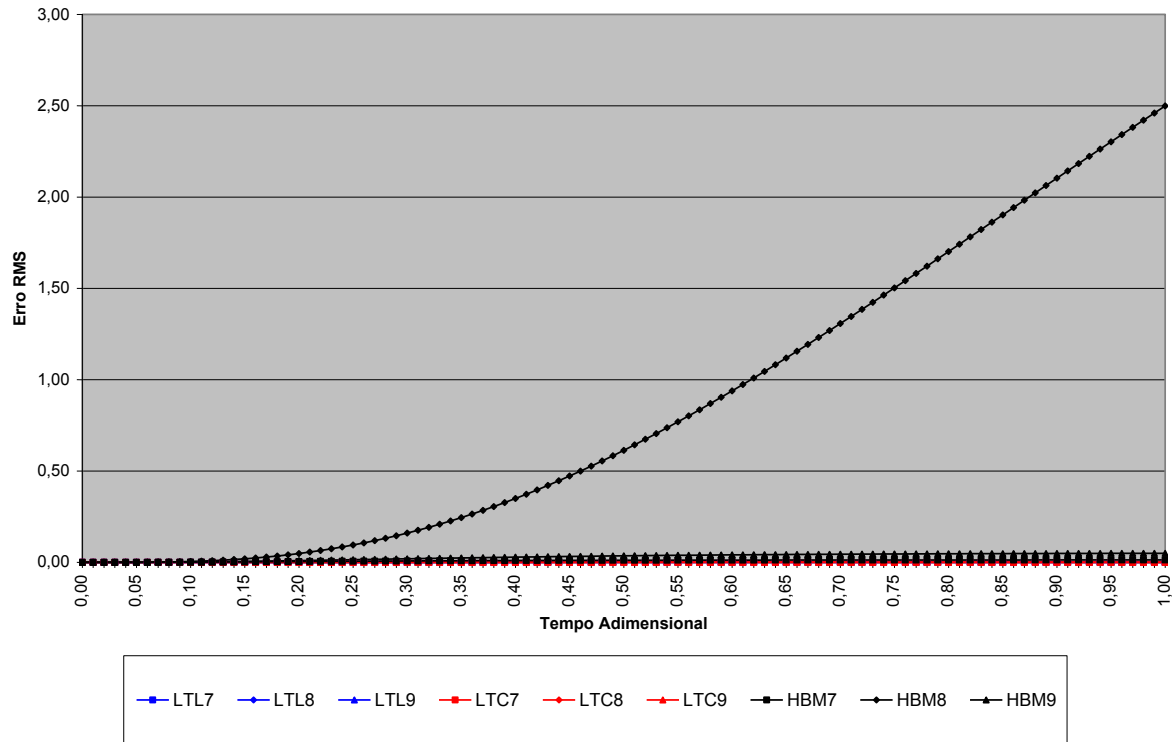


Fig. D-24 – Análise do erro RMS das soluções (LTL, LTC e HBM) em comparação a de VF para as condições de convecção com variação linear à esquerda e (7 - temperatura prescrita, 8 - fluxo prescrita e 9 - convecção) à direita.

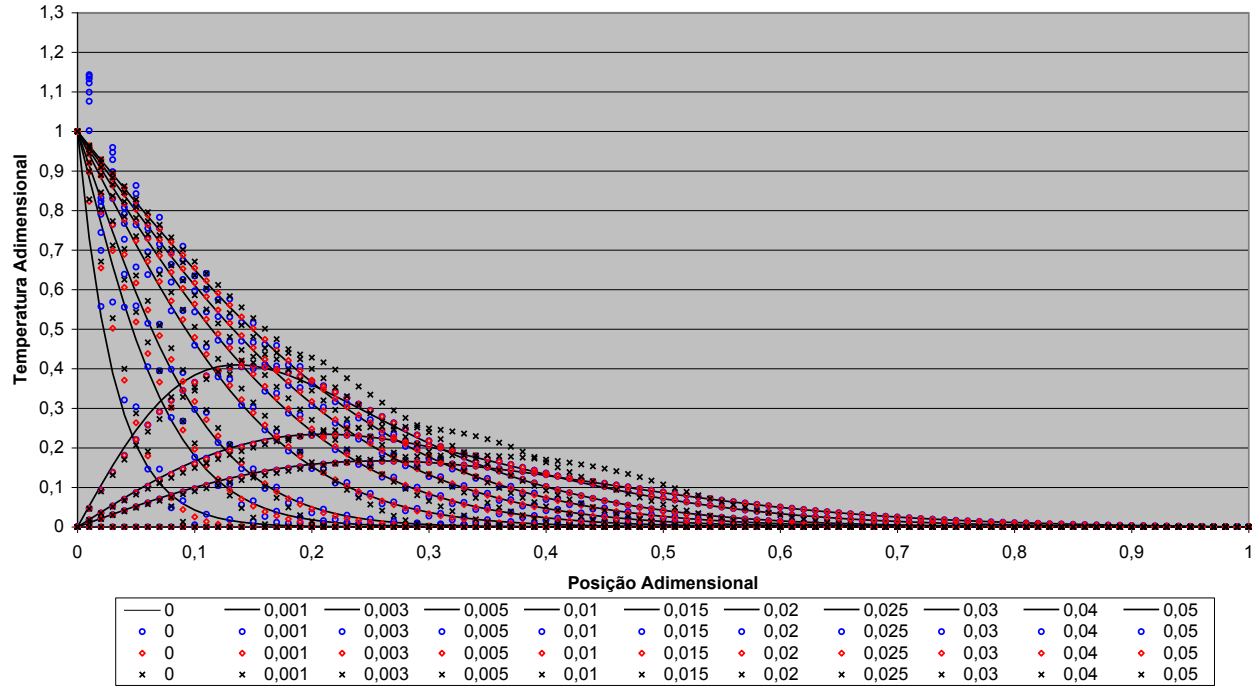


Fig. D-25 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,05 ) pelo s diversos métodos ( – VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de pulso de temperatura prescrita à esquerda e temperatura prescrita à direita.

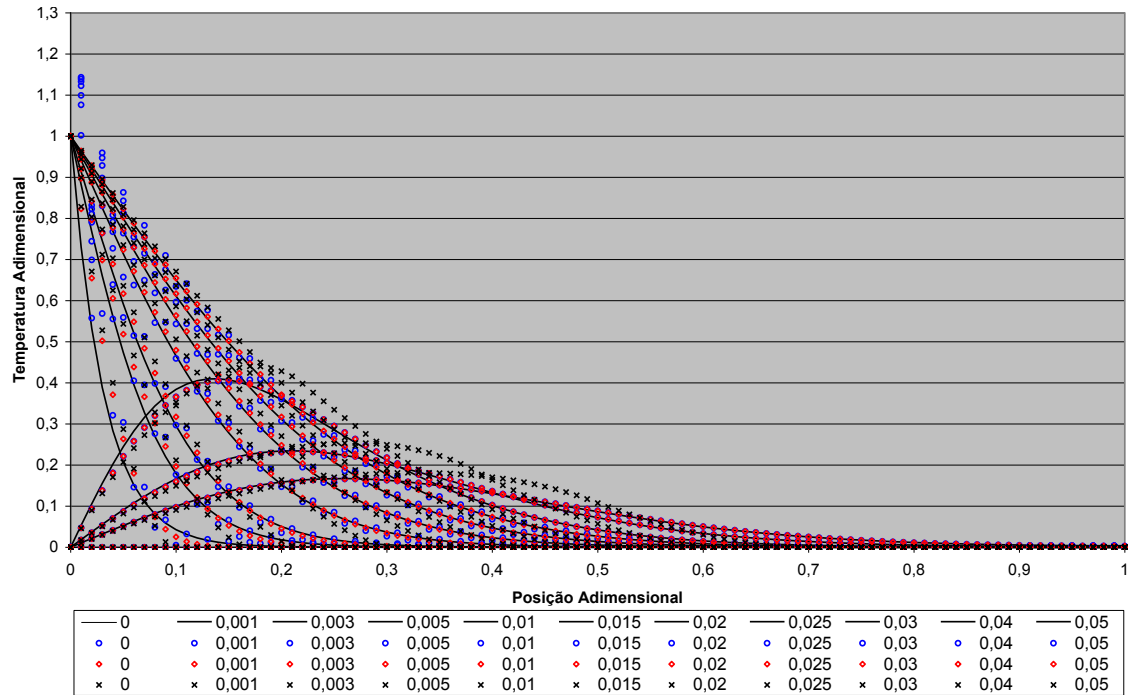


Fig. D-26 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,05) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de pulso de temperatura prescrita à esquerda e fluxo prescrito à direita.

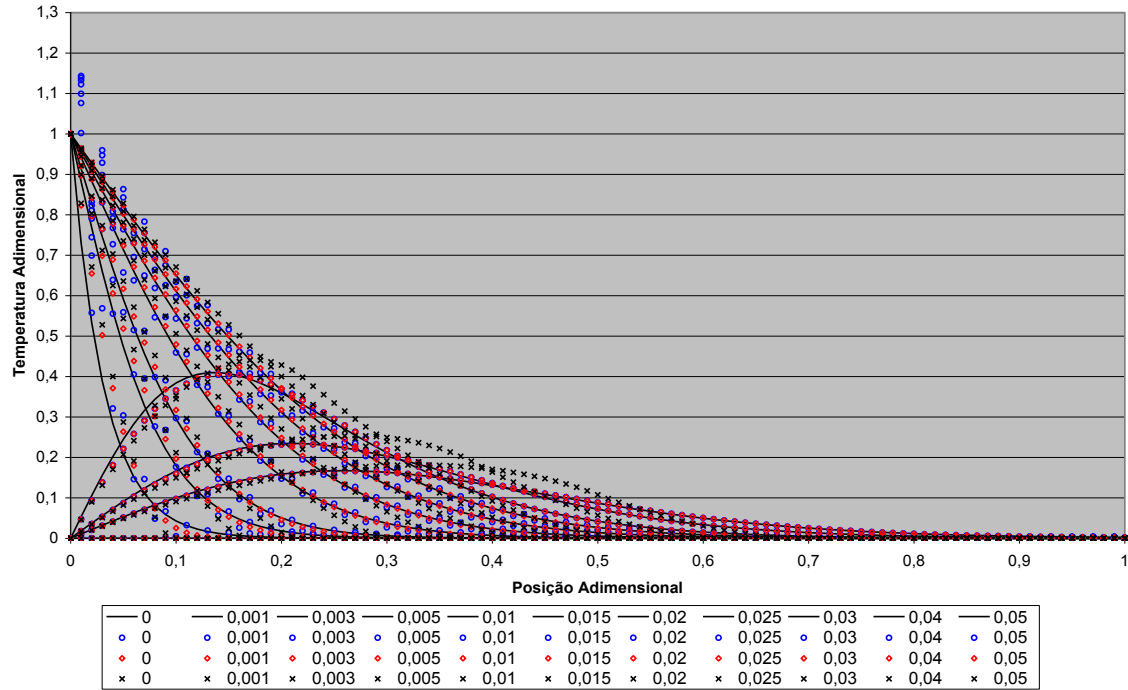


Fig. D-27 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,05 ) pelos diversos métodos ( – VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de pulso de temperatura prescrita à esquerda e convecção à direita.

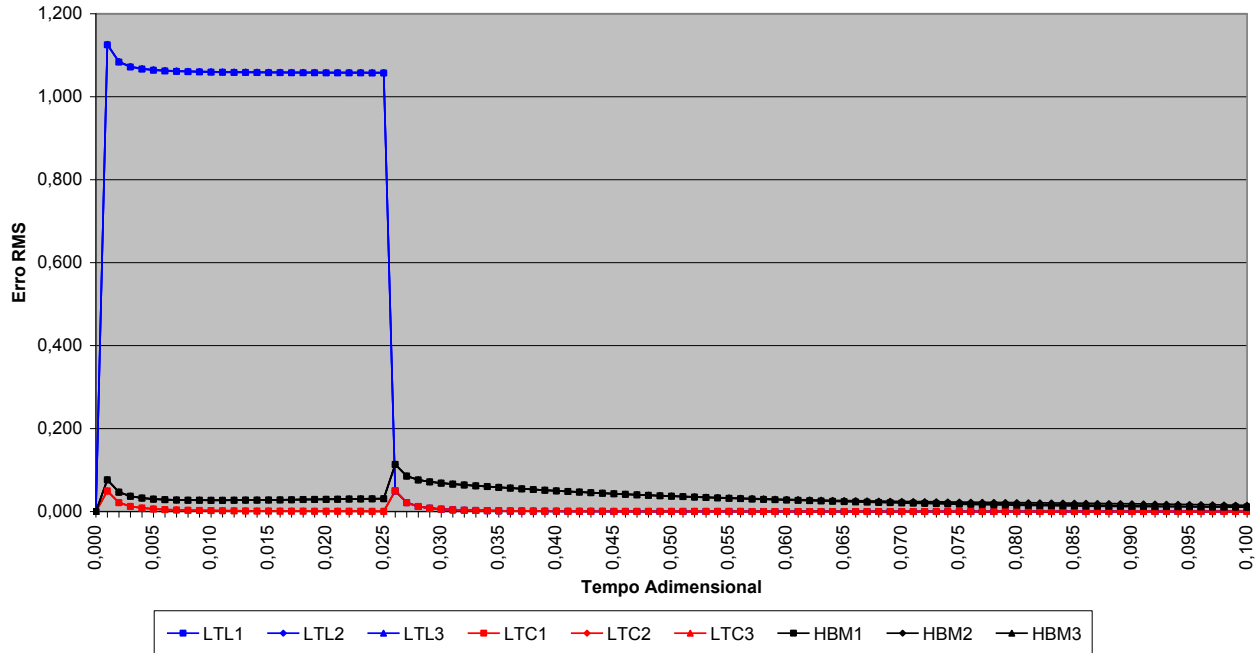


Fig. D-28 – Análise do erro RMS das soluções (LTL, LTC e HBM) em comparação a de VF para as condições de pulso de temperatura prescrita à esquerda e (1 - temperatura prescrita, 2 - fluxo prescrita e 3 - convecção) à direita.

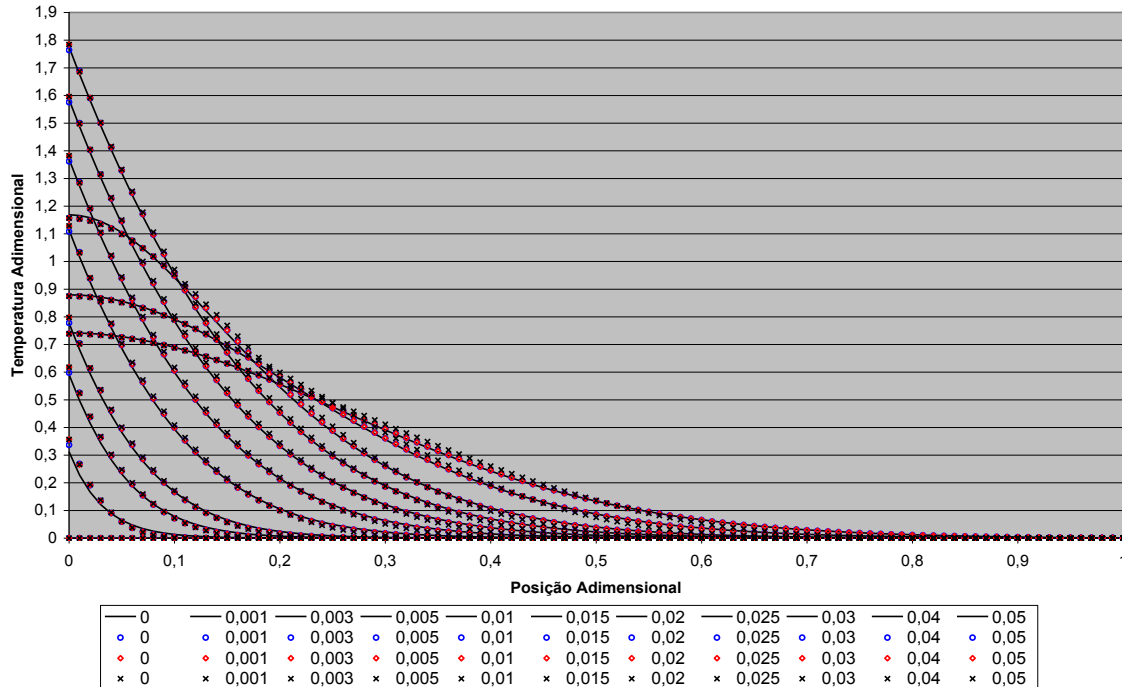


Fig. D-29 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,05 ) pelos diversos métodos ( – VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de pulso de fluxo prescrito à esquerda e temperatura prescrito à direita.

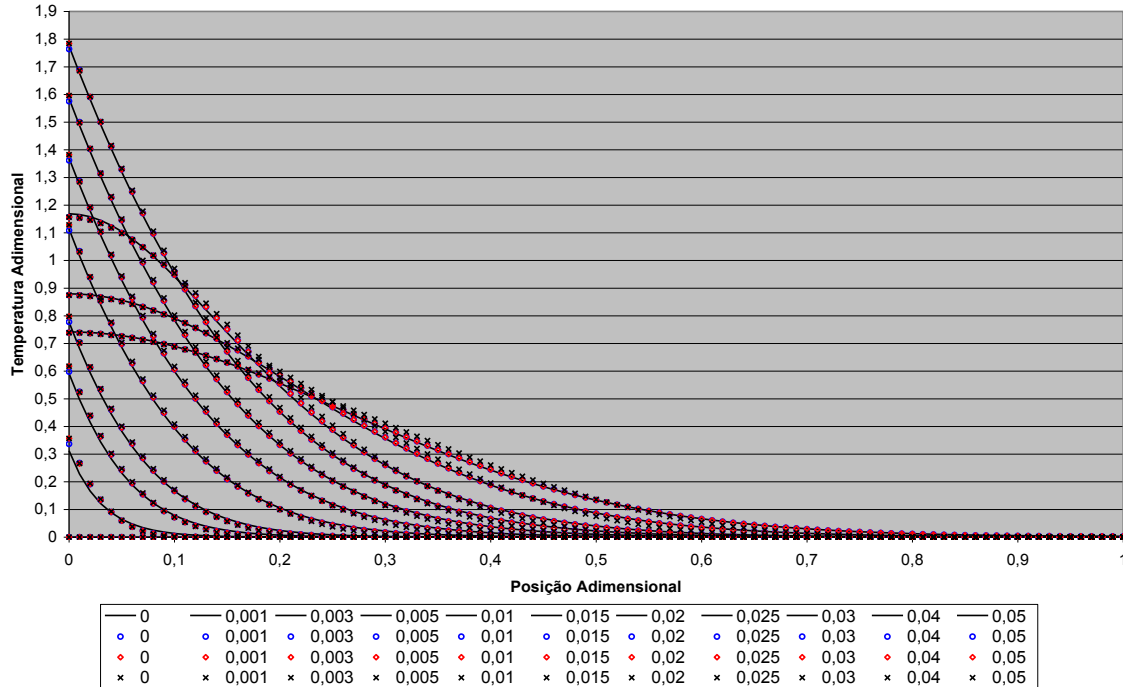


Fig. D-30 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,05) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de pulso de fluxo prescrito à esquerda e fluxo prescrito à direita.

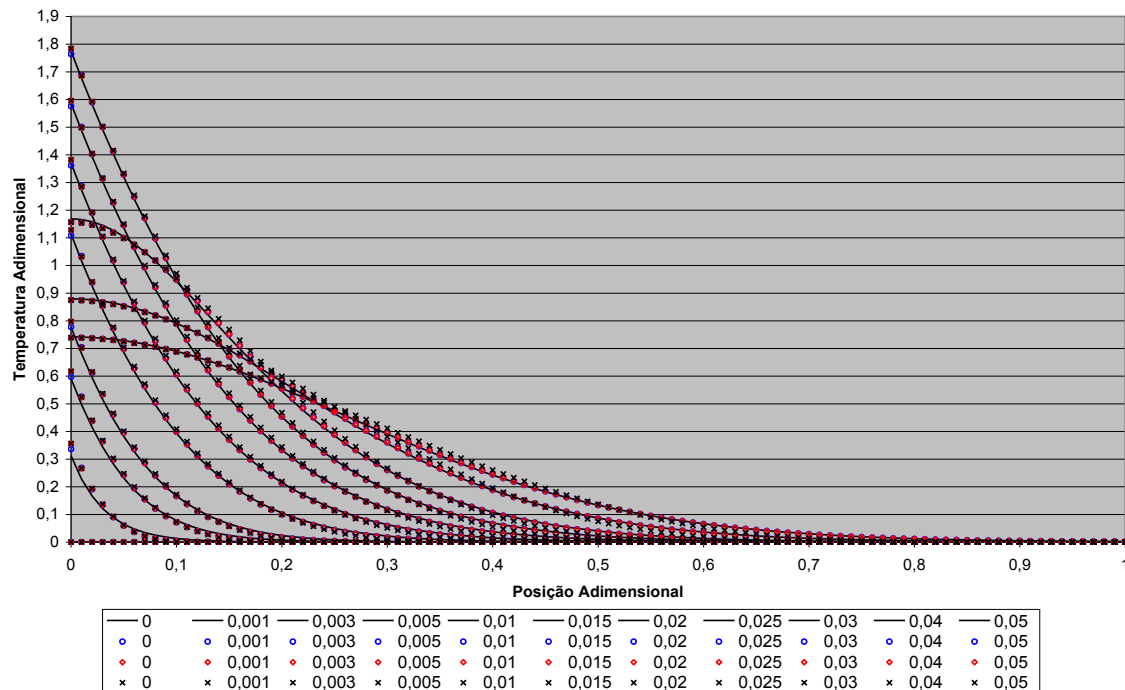


Fig. D-31 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo (0 até 0,05) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de pulso de fluxo prescrito à esquerda e convecção à direita.



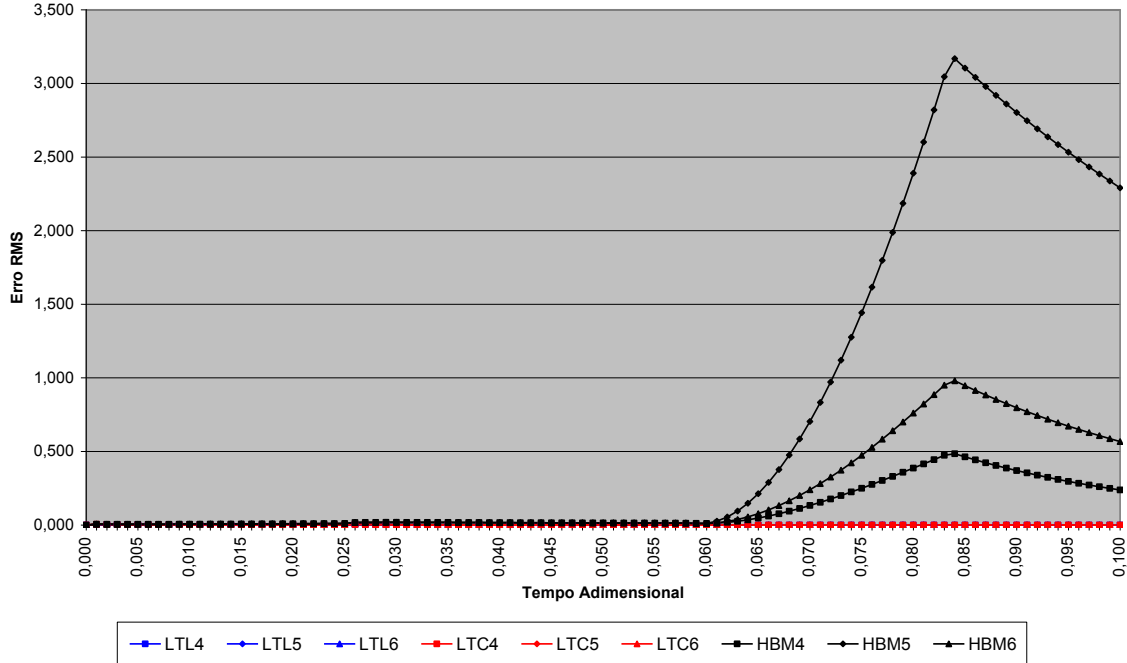


Fig. D-32 – Análise do erro RMS das soluções (LTL, LTC e HBM) em comparação a de VF para as condições de pulso de fluxo prescrito à esquerda e (4 - temperatura prescrito, 5 - fluxo prescrito e 6 - convecção) à direita.

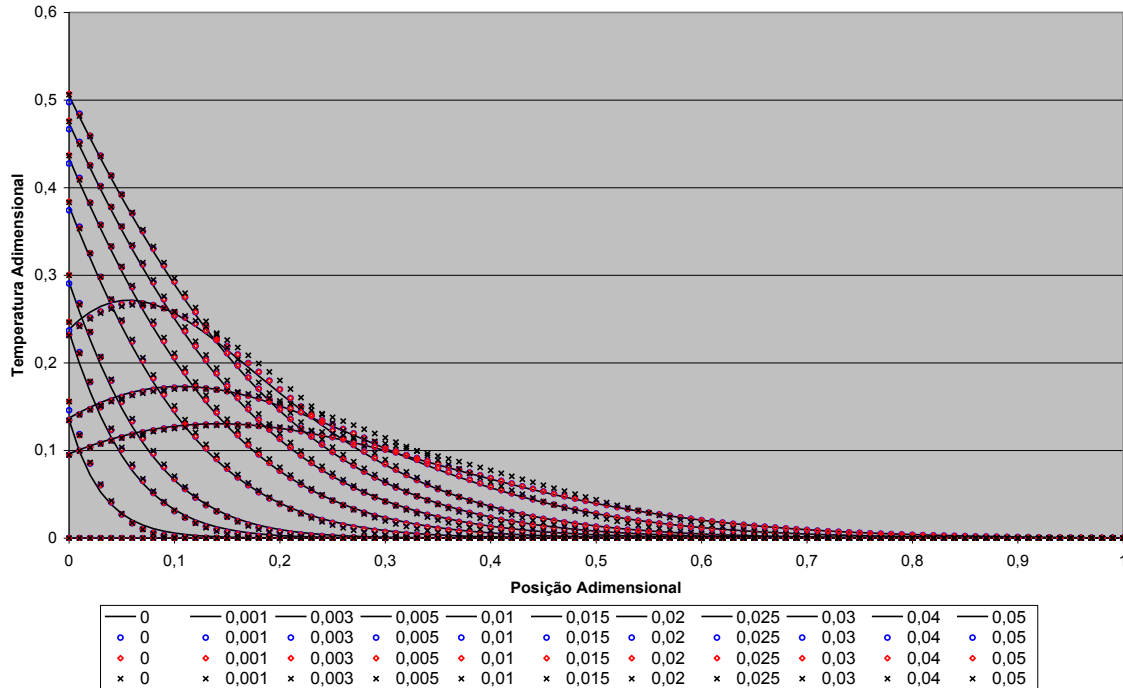


Fig. D-33 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,05 ) pelos diversos métodos (— VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de pulso de convecção à esquerda e temperatura prescrita à direita.

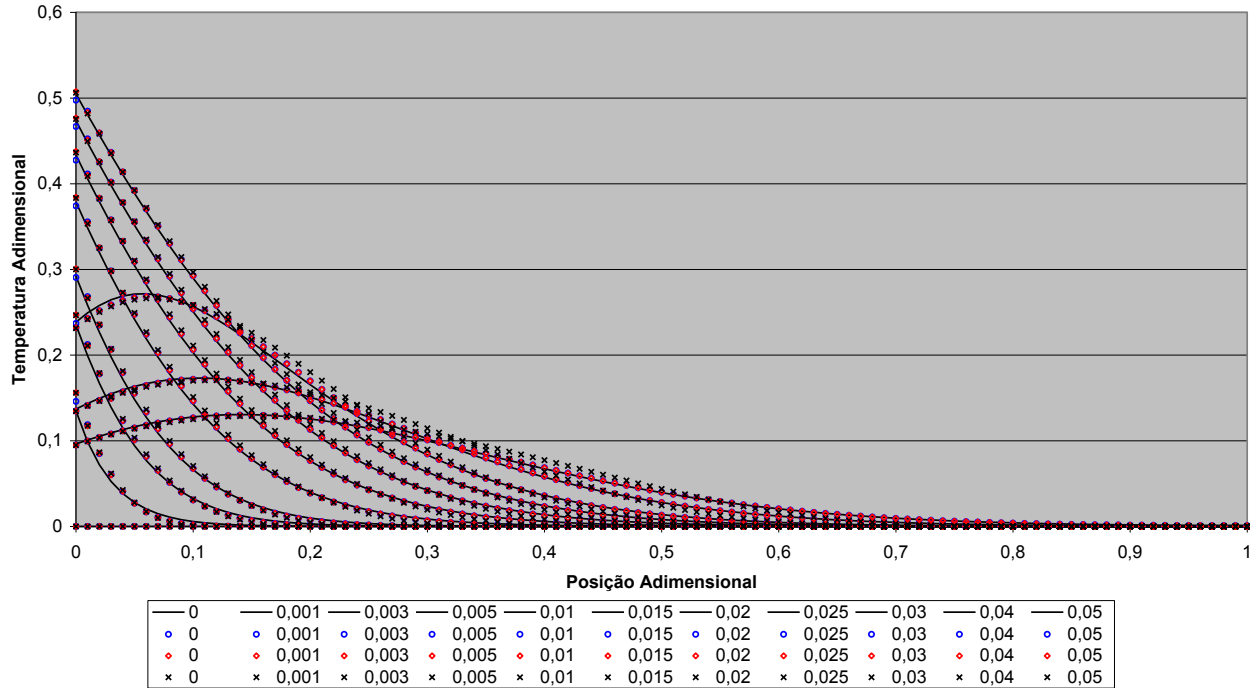


Fig. D-34 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,05 ) pelos diversos métodos ( — VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de pulso de convecção à esquerda e fluxo prescrito à direita.

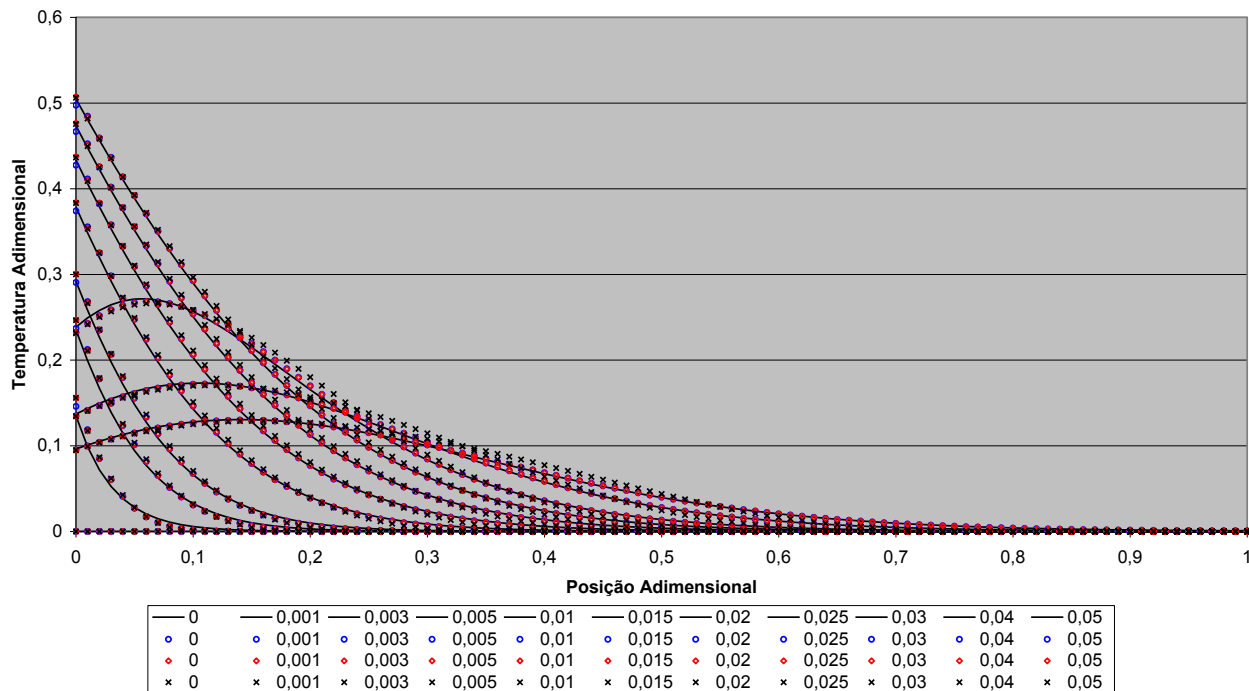


Fig. D-35 – Comparação das soluções obtidas em diversos instantes de tempo ( 0 até 0,05 ) pelos diversos métodos ( - VF; ○ LTL; ◇ LTC; × HBIM) para as condições de pulso de convecção à esquerda e convecção à direita.

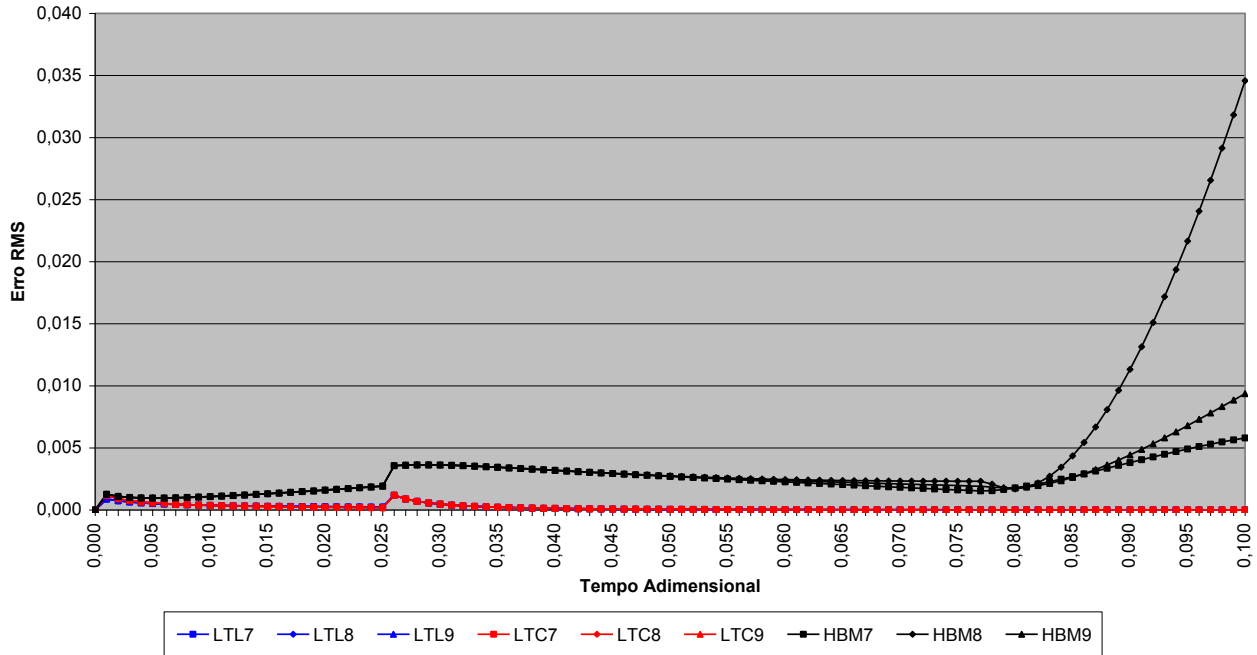


Fig. D-36 – Análise do erro RMS das soluções (LTL, LTC e HBM) em comparação a de VF para as condições de pulso de convecção à esquerda e (7 - temperatura prescrita, 8 - fluxo prescrita e 9 - convecção) à direita.



## APÊNDICE E – SOLUÇÃO INVERSA

Neste anexo são apresentados os gráficos de todos os testes realizados sobre o algoritmo implementado para a solução inversa. A explicação detalhada de um gráfico representativo, bem como as análises sobre os mesmos encontram-se no corpo do Capítulo 5.

### Teste #01: Fluxo simples sem ruído – 2 parâmetros

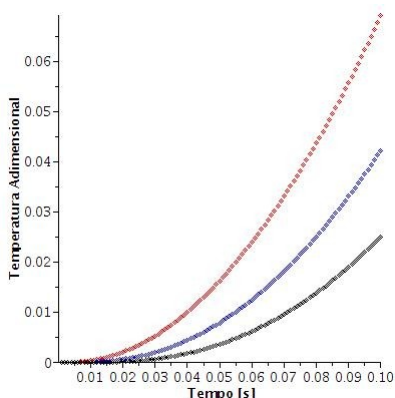


Fig. E-1 – Dados gerados para  $x = 0.1$  (vermelho),  $x = 0.2$  (azul) e  $x = 0.3$  (preto)

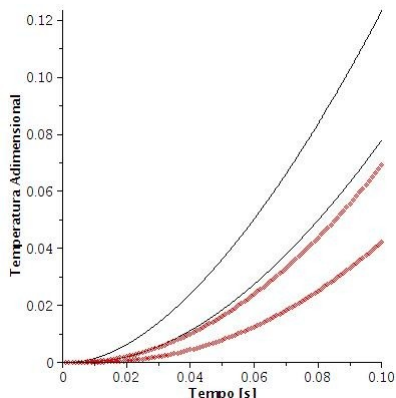


Fig. E-2 – Dados iniciais para  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$  (vermelho) e o estimado com os valores iniciais dos parâmetros.

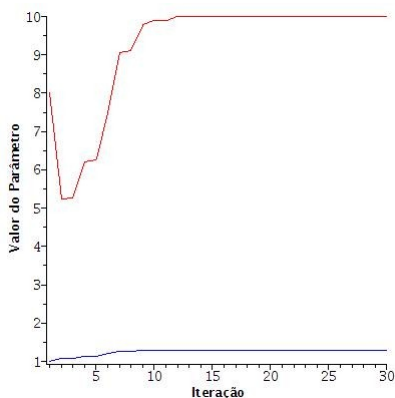


Fig. E-3 – Evolução de convergência de  $P_1$  (vermelho) e  $P_2$  (azul)

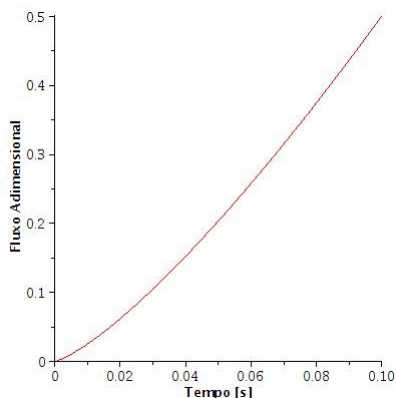


Fig. E-4 – Comparação do Fluxo Previsto (vermelho) e o Estimado (azul)

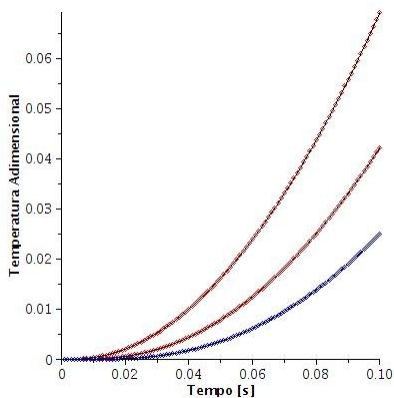


Fig. E-5 – Comparação das Temperaturas Previstas (discreta) e o Estimadas (contínua)

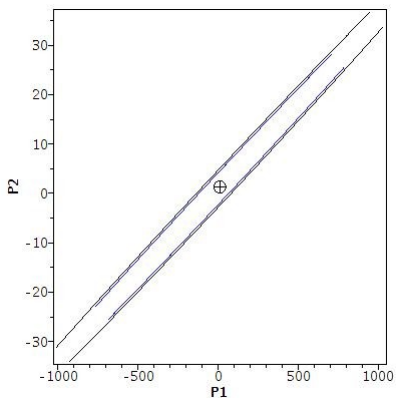


Fig. E-6 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99%

### Teste #02: Fluxo tipo pulso sem ruído – 4 parâmetros

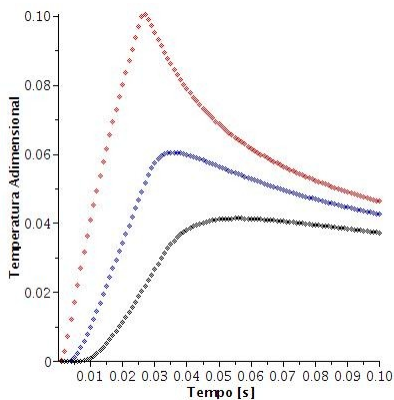


Fig. E-7 – Dados gerados para  $x = 0.1$  (vermelho),  $x = 0.2$  (azul) e  $x = 0.3$  (preto)

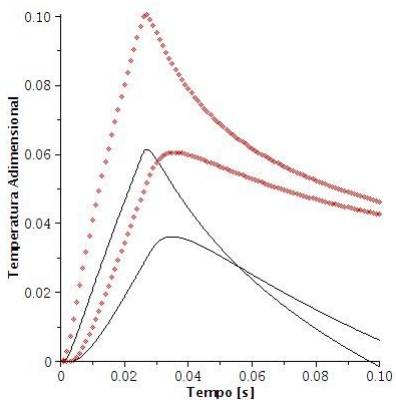


Fig. E-8 – Dados iniciais para  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$  (vermelho) e o estimado com os valores iniciais dos parâmetros.



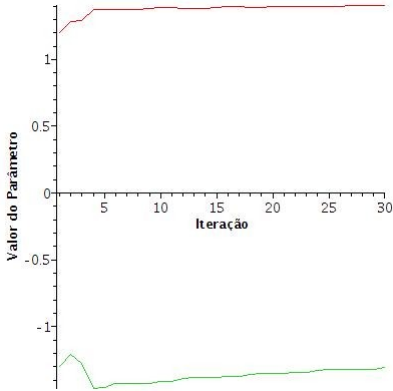


Fig. E-9 – Evolução de convergência de  $P_1$ (vermelho) e  $P_2$ (azul)

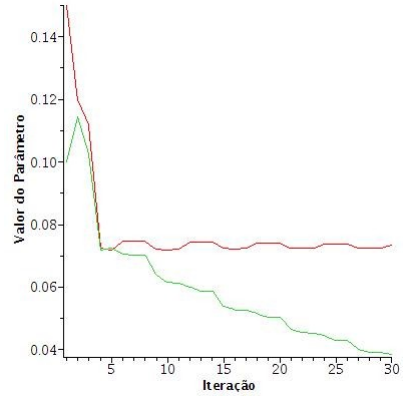


Fig. E-10 – Evolução de convergência de  $P_3$ (vermelho) e  $P_4$ (azul)

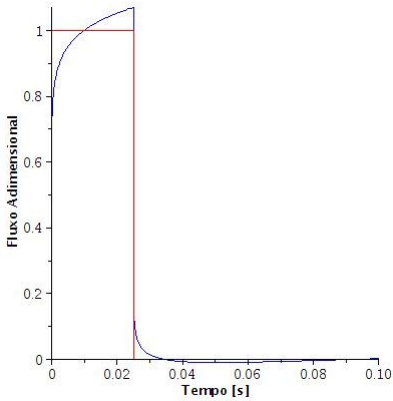


Fig. E-11 – Comparação do Fluxo Previsto (vermelho) e o Estimado (azul)

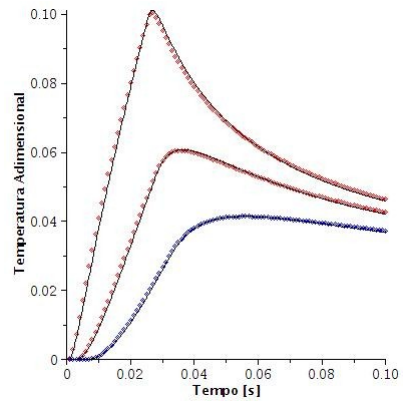


Fig. E-12 – Comparação das Temperaturas Previstas (discreta) e o Estimadas (contínua)

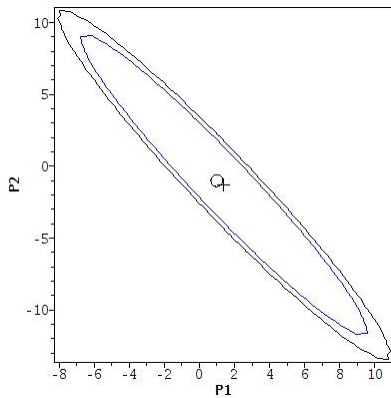


Fig. E-13 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_1$  e  $P_2$

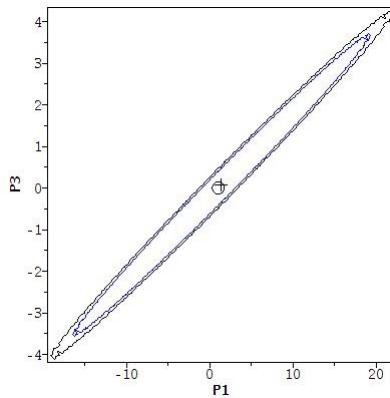


Fig. E-14 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_1$  e  $P_3$

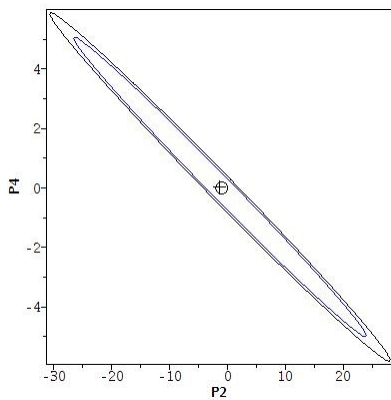


Fig. E-15 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_2$  e  $P_4$

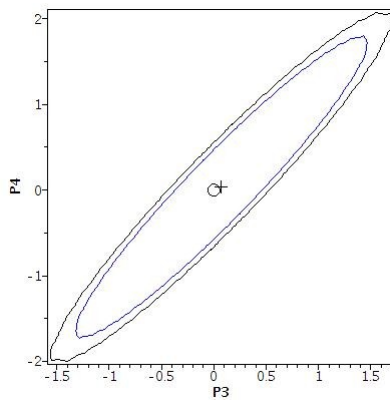


Fig. E-16 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_3$  e  $P_4$

### Teste #03: Fluxo tipo pulso sem ruído – 5 parâmetros

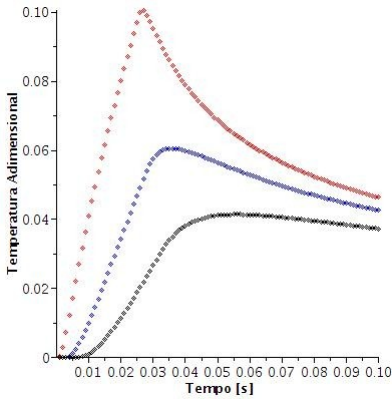


Fig. E-17 – Dados gerados para  $x = 0.1$  (vermelho),  $x = 0.2$  (azul) e  $x = 0.3$  (preto)

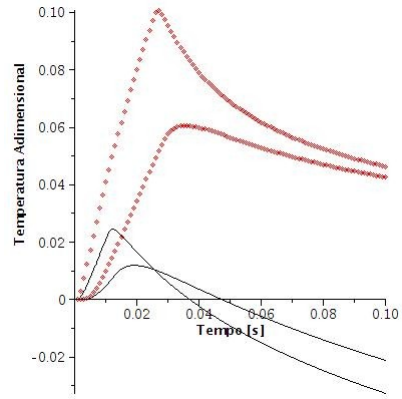


Fig. E-18 – Dados iniciais para  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$  (vermelho) e o estimado com os valores iniciais dos parâmetros.

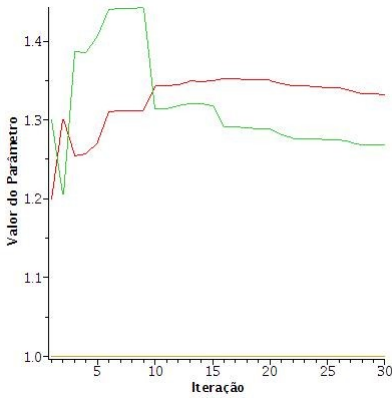


Fig. E-19 – Evolução de convergência de  $P_1$  (vermelho) e  $P_2$  (azul)

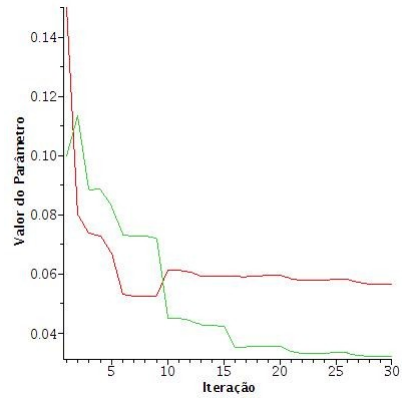


Fig. E-20 – Evolução de convergência de  $P_3$  (vermelho) e  $P_4$  (azul)

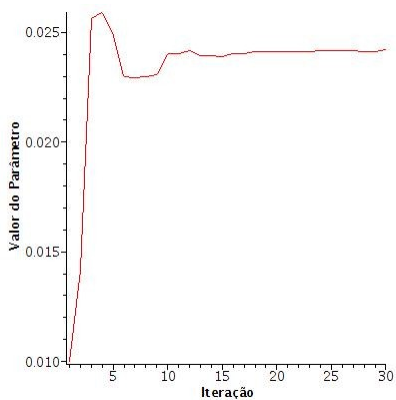


Fig. E-21 – Evolução de convergência de  $P_5$  (vermelho)

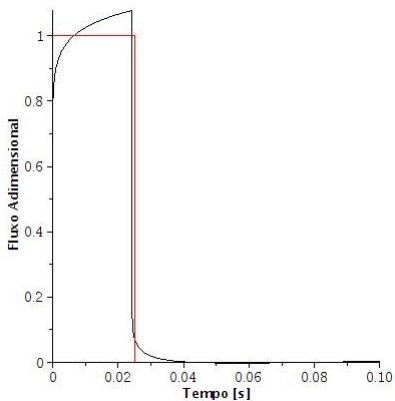


Fig. E-22 – Comparação do Fluxo Previsto (vermelho) e o Estimado (azul)

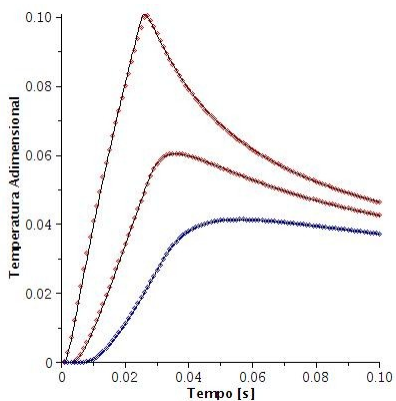


Fig. E-23 – Comparação das Temperaturas Previstas (discreta) e o Estimadas (contínua)

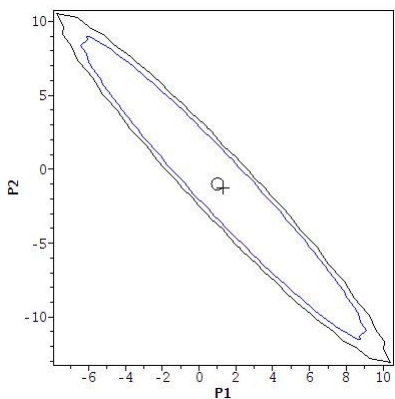


Fig. E-24 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_1$  e  $P_2$

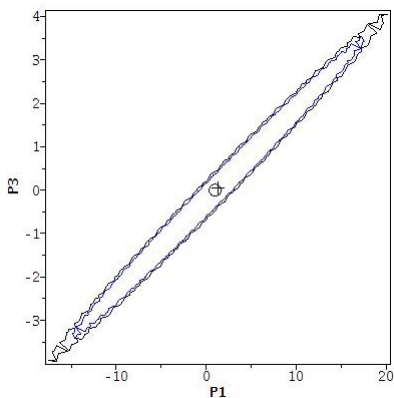


Fig. E-25 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_1$  e  $P_3$

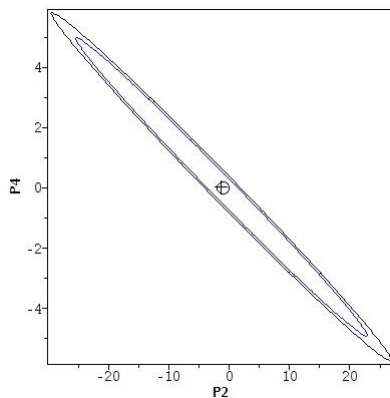


Fig. E-26 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_2$  e  $P_4$

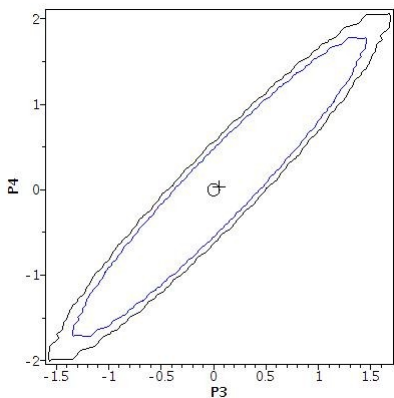


Fig. E-27 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_3$  e  $P_4$

### Teste #04: Fluxo tipo pulso sem ruído – 6 parâmetros

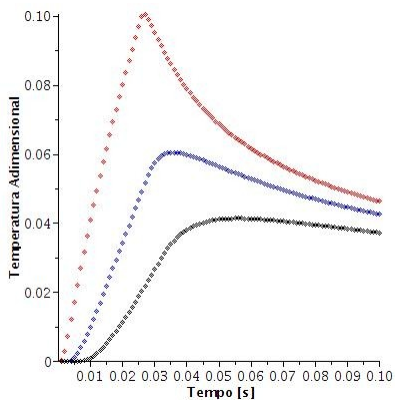


Fig. E-28 – Dados gerados para  $x = 0.1$  (vermelho),  $x = 0.2$  (azul) e  $x = 0.3$  (preto)

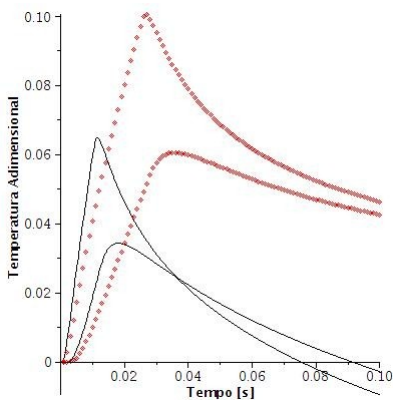


Fig. E-29 – Dados iniciais para  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$  (vermelho) e o estimado com os valores iniciais dos parâmetros.

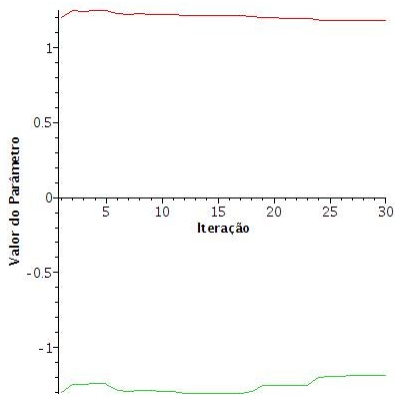


Fig. E-30 – Evolução de convergência de  $P_1$  (vermelho) e  $P_2$  (azul)

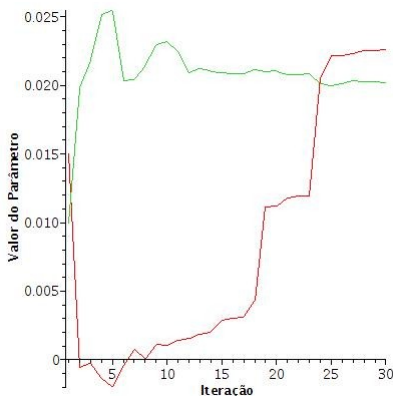


Fig. E-31 – Evolução de convergência de  $P_3$  (vermelho) e  $P_4$  (azul)

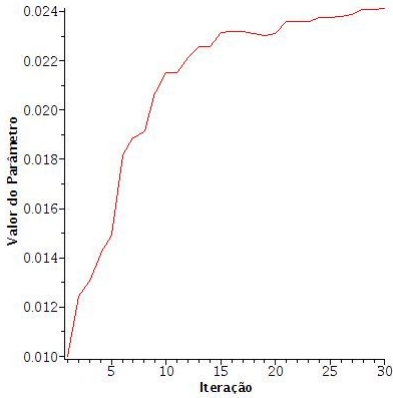


Fig. E-32 – Evolução de convergência de  $P_5$  (vermelho)

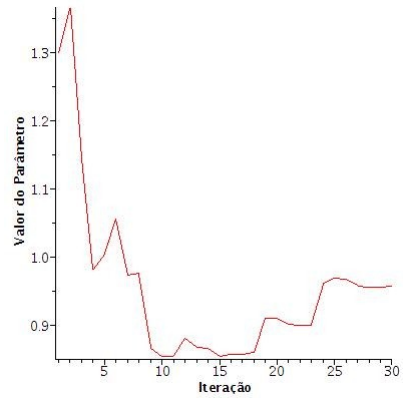


Fig. E-33 – Evolução de convergência de  $P_6$  (vermelho)

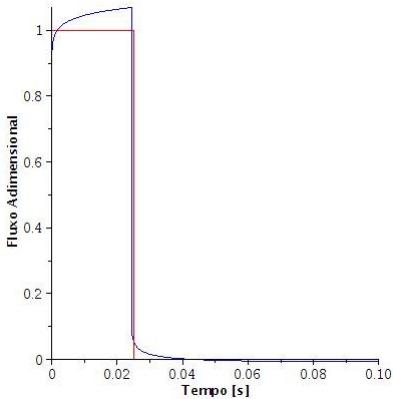


Fig. E-34 – Comparação do Fluxo Previsto (vermelho) e o Estimado (azul)

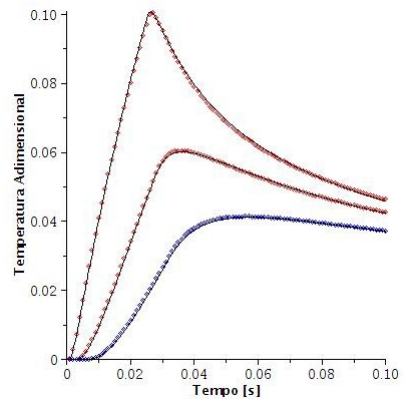


Fig. E-35 – Comparação das Temperaturas Previstas (discreta) e o Estimadas (contínua)

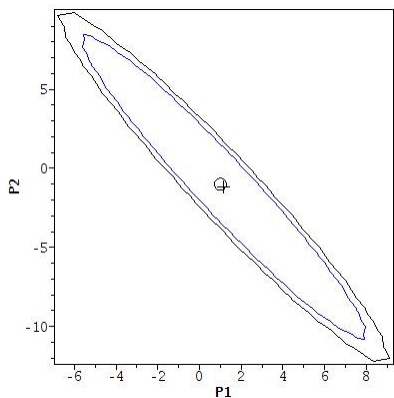


Fig. E-36 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_1$  e  $P_2$

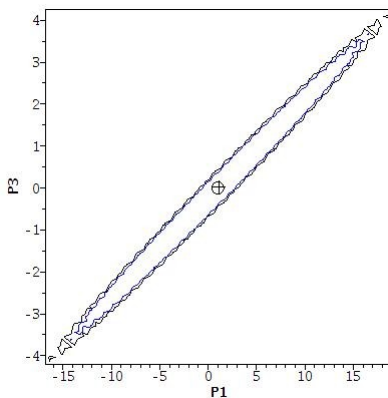


Fig. E-37 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_1$  e  $P_3$

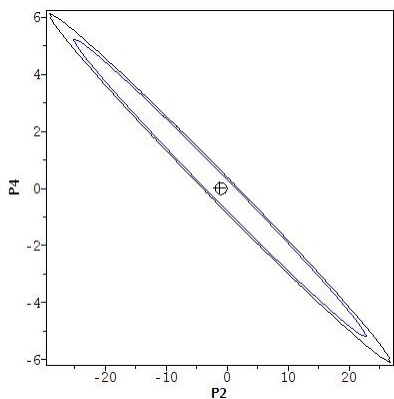


Fig. E-38 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_2$  e  $P_4$

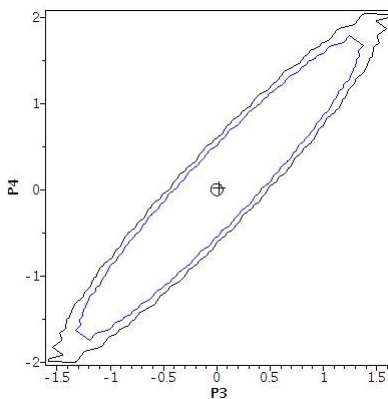


Fig. E-39 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_3$  e  $P_4$



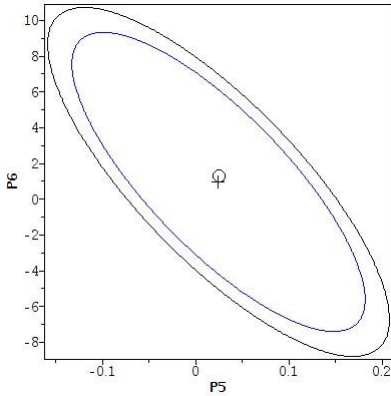


Fig. E-40 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_5$  e  $P_6$

### Teste #05: Fluxo simples com ruído – 2 parâmetros

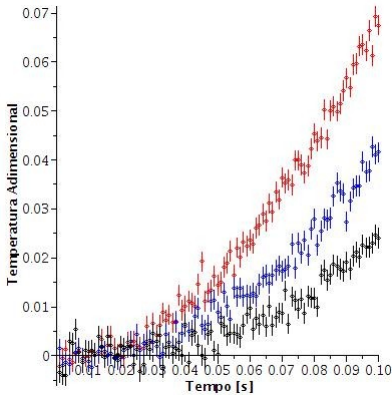


Fig. E-41 – Dados gerados para  $x = 0.1$  (vermelho),  $x = 0.2$  (azul) e  $x = 0.3$  (preto)

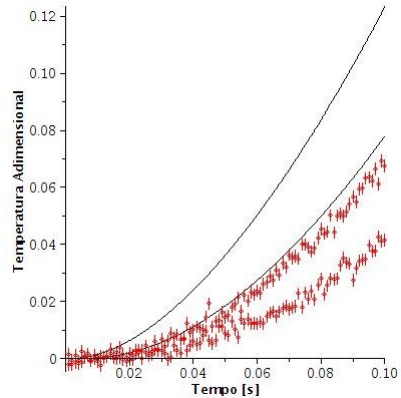


Fig. E-42 – Dados iniciais para  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$  (vermelho) e o estimado com os valores iniciais dos parâmetros.

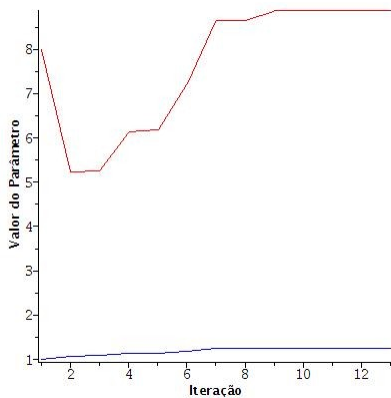


Fig. E-43 – Evolução de convergência de  $P_1$  (vermelho) e  $P_2$  (azul)

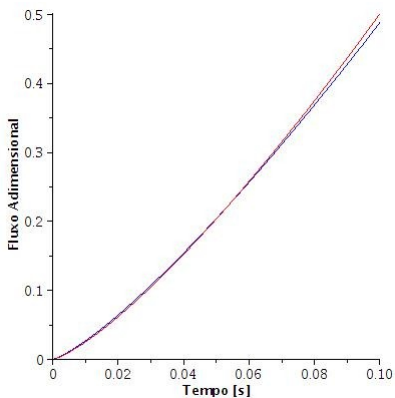


Fig. E-44 – Comparação do Fluxo Previsto (vermelho) e o Estimado (azul)

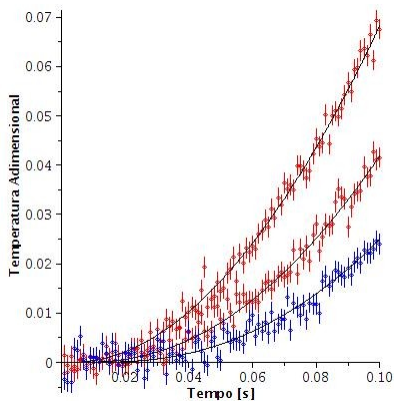


Fig. E-45 – Comparação das Temperaturas Previstas (discreta) e o Estimadas (contínua)

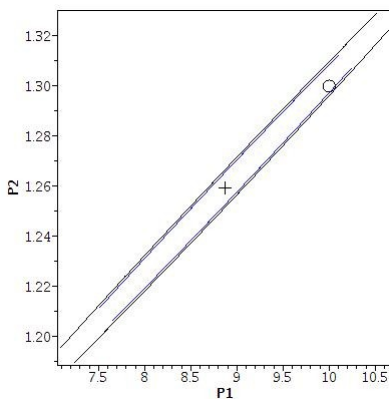


Fig. E-46 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_1$  e  $P_2$

### Teste #06: Fluxo tipo pulso com ruído – 4 parâmetros

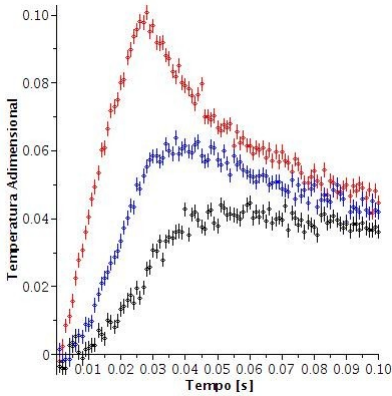


Fig. E-47 – Dados gerados para  $x = 0.1$  (vermelho),  $x = 0.2$  (azul) e  $x = 0.3$  (preto)

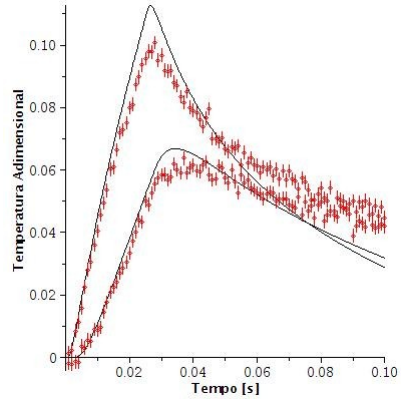


Fig. E-48 – Dados iniciais para  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$  (vermelho) e o estimado com os valores iniciais dos parâmetros.

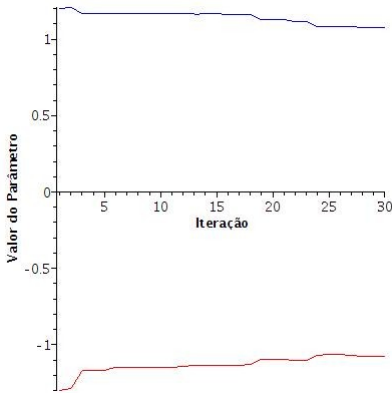


Fig. E-49 – Evolução de convergência de  $P_1$  (vermelho) e  $P_2$  (azul)

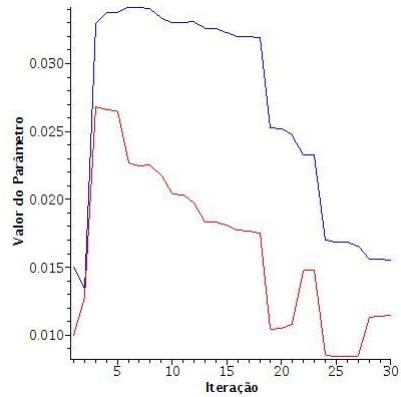


Fig. E-50 – Evolução de convergência de  $P_3$  (vermelho) e  $P_4$  (azul)

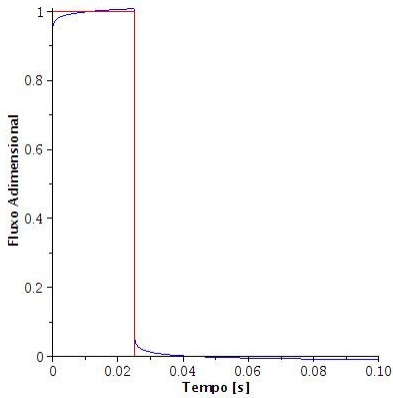


Fig. E-51 – Comparação do Fluxo Previsto (vermelho) e o Estimado (azul)

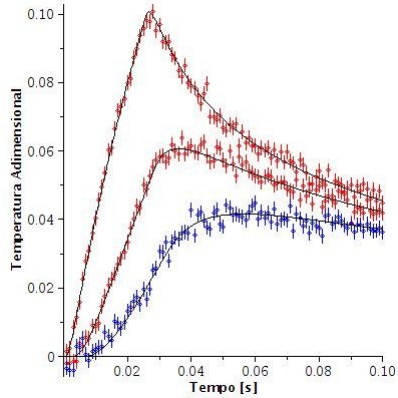


Fig. E-52 – Comparação das Temperaturas Previstas (discreta) e o Estimadas (contínua)

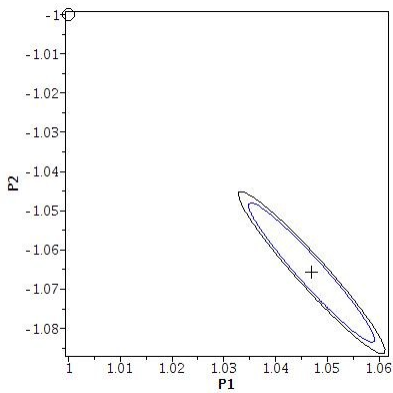


Fig. E-53 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_1$  e  $P_2$

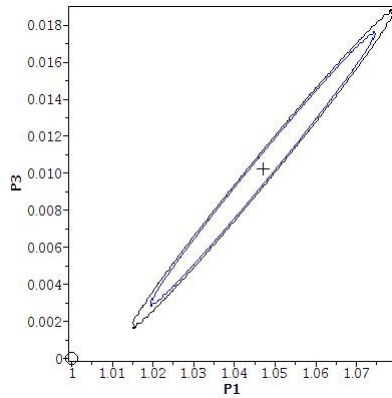


Fig. E-54 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_1$  e  $P_3$

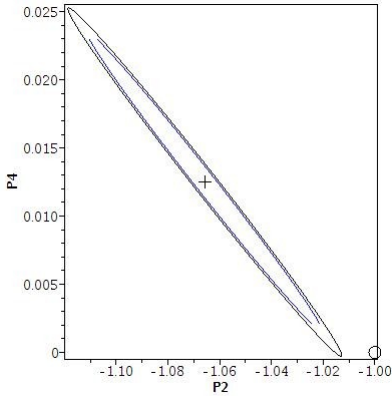


Fig. E-55 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_2$  e  $P_4$

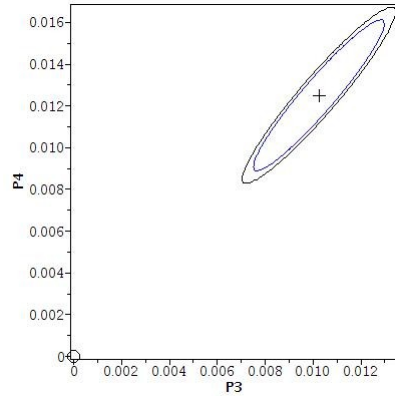


Fig. E-56 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_3$  e  $P_4$

### Teste #07: Fluxo tipo pulso com ruído – 5 parâmetros

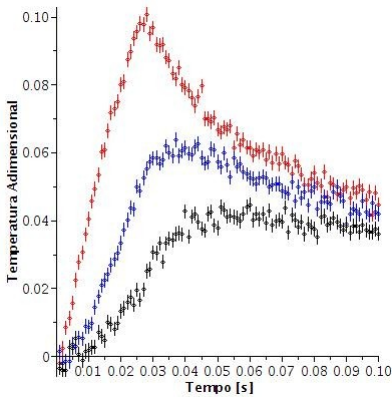


Fig. E-57 – Dados gerados para  $x = 0.1$  (vermelho),  $x = 0.2$  (azul) e  $x = 0.3$  (preto)

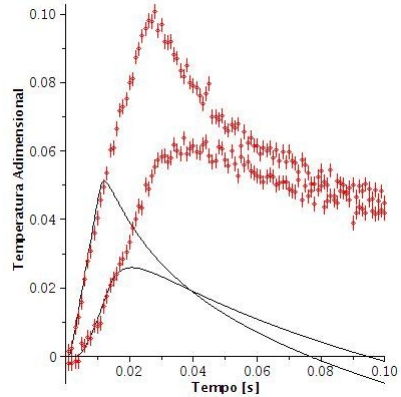


Fig. E-58 – Dados iniciais para  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$  (vermelho) e o estimado com os valores iniciais dos parâmetros.

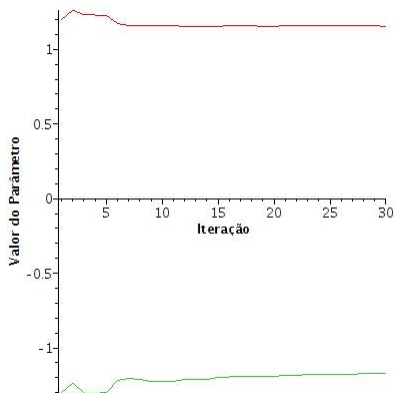


Fig. E-59 – Evolução de convergência de  $P_1$  (vermelho) e  $P_2$  (azul)

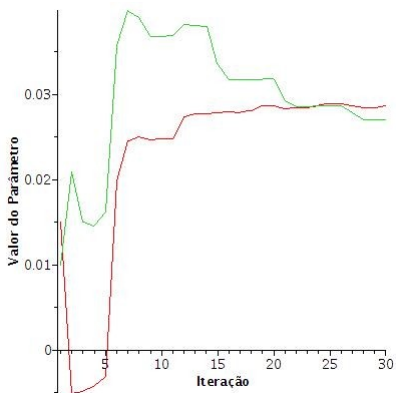


Fig. E-60 – Evolução de convergência de  $P_3$  (vermelho) e  $P_4$  (azul)

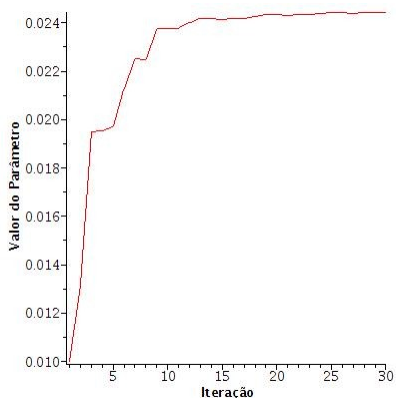


Fig. E-61 – Evolução de convergência de  $P_5$  (vermelho)

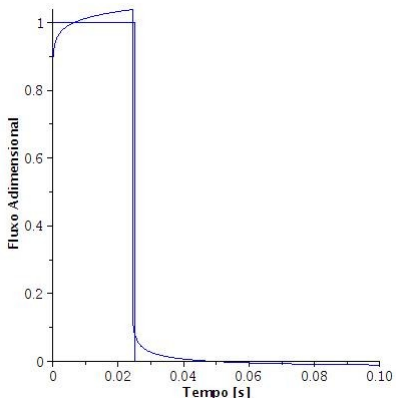


Fig. E-62 – Comparação do Fluxo Previsto (vermelho) e o Estimado (azul)

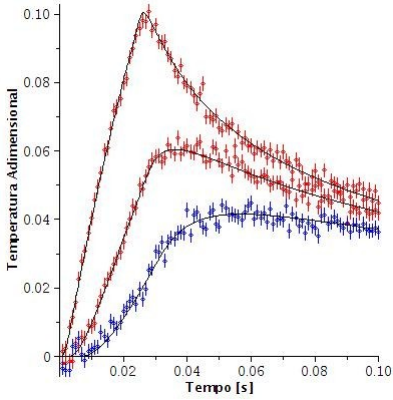


Fig. E-63 – Comparação das Temperaturas Previstas (discreta) e o Estimadas (contínua)

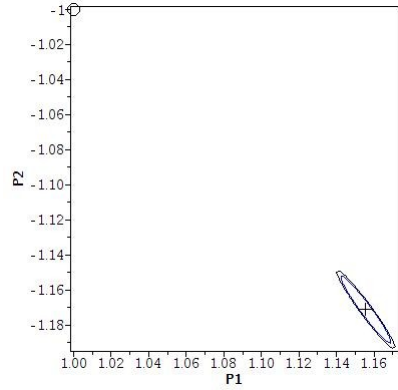


Fig. E-64 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_1$  e  $P_2$

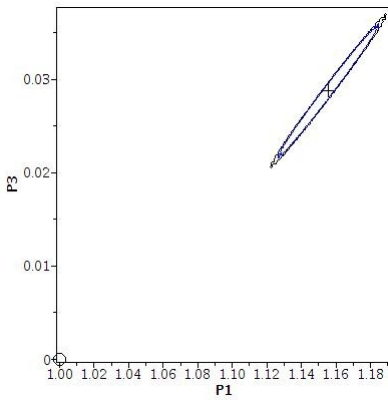


Fig. E-65 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_1$  e  $P_3$

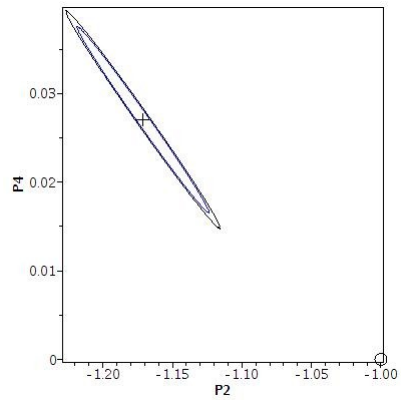


Fig. E-66 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_2$  e  $P_4$

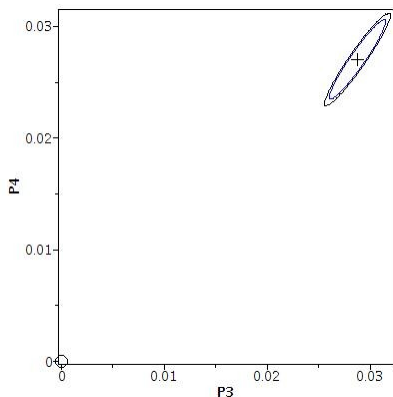


Fig. E-67 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_3$  e  $P_4$

### Teste #08: Fluxo tipo pulso com ruído – 6 parâmetros

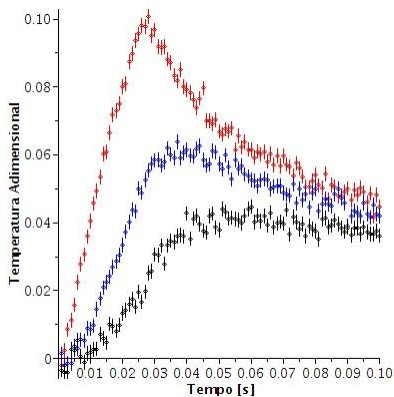


Fig. E-68 – Dados gerados para  $x = 0.1$  (vermelho),  $x = 0.2$  (azul) e  $x = 0.3$  (preto)

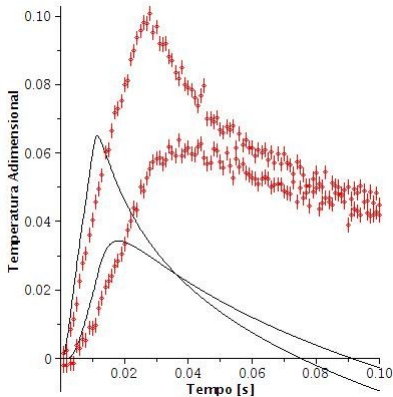


Fig. E-69 – Dados iniciais para  $x = 0.1$  e  $x = 0.2$  (vermelho) e o estimado com os valores iniciais dos parâmetros.



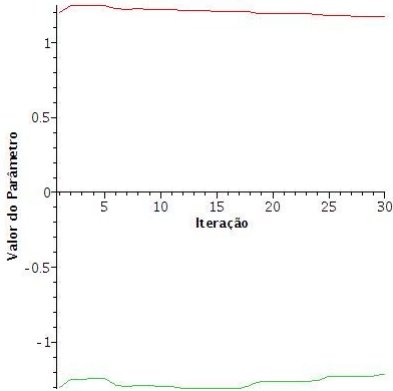


Fig. E-70 – Evolução de convergência de  $P_1$  (vermelho) e  $P_2$  (azul)

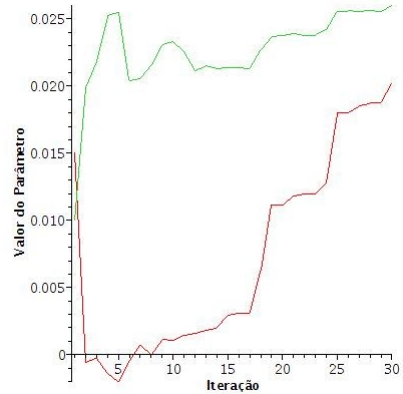


Fig. E-71 – Evolução de convergência de  $P_3$  (vermelho) e  $P_4$  (azul)

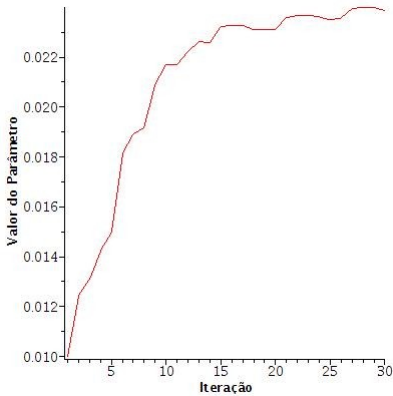


Fig. E-72 – Evolução de convergência de  $P_5$  (vermelho)

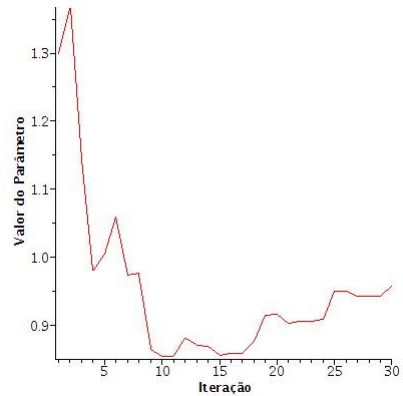


Fig. E-73 – Evolução de convergência de  $P_6$  (vermelho)

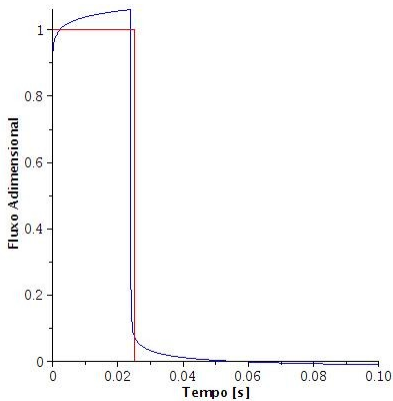


Fig. E-74 – Comparação do Fluxo Previsto (vermelho) e o Estimado (azul)

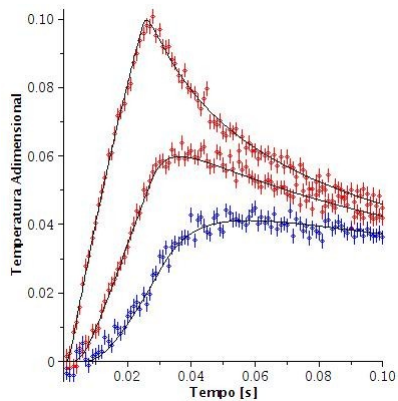


Fig. E-75 – Comparação das Temperaturas Previstas (discreta) e o Estimadas (contínua)

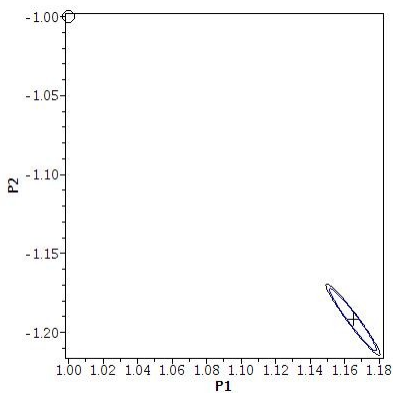


Fig. E-76 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_1$  e  $P_2$

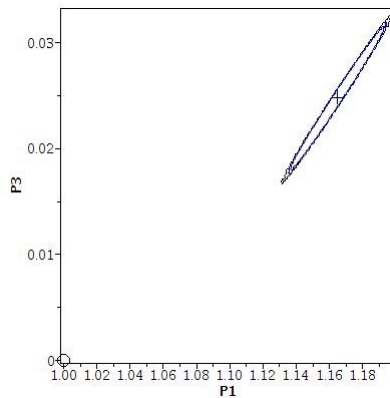


Fig. E-77 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_1$  e  $P_3$

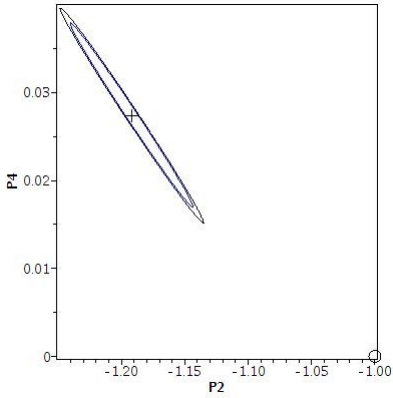


Fig. E-78 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_2$  e  $P_4$

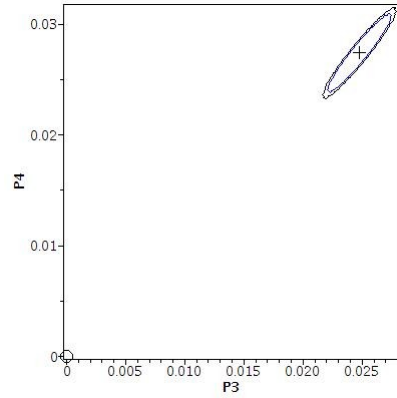


Fig. E-79 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_3$  e  $P_4$

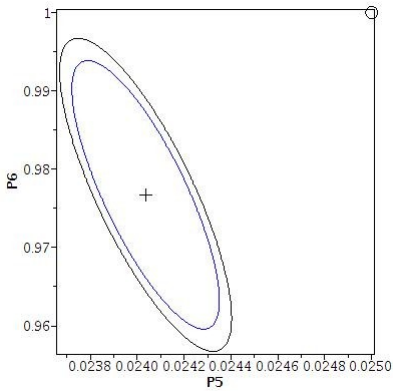


Fig. E-80 – Elipse de Confiabilidade de 95% e 99% entre  $P_5$  e  $P_6$

